ORSAY
Série A. N°
N° d'ordre : 106

THÈSE

présentée

A LA FACULTÉ DES SCIENCES D'ORSAY
UNIVERSITÉ DE PARIS

pour obtenir le titre de Docteur de l'Université

(mention Sciences)

par

Maurice NOIRET

SUJET :

LÉVITATION ÉLECTROMAGNÉTIQUE DES LIQUIDES

Soutenue le 20 Janvier 1971, devant la Commission d'Examen

Président : **Mr le Professeur GRIVET**

Examinateurs : **Mr le Professeur DUFOUR**
Mr le Professeur BERTEIN

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41556001_0014

LEVITATION ELECTROMAGNETIQUE DES LIQUIDES

LEVITATION ELECTROMAGNETIQUE DES LIQUIDES

EN TEMOIGNAGE DE RECONNAISSANCE

à

Monsieur le Professeur Charles DUFOUR

OBJET.

L'objet principal du présent travail est une étude théorique et expérimentale de la LEVITATION ELECTROMAGNETIQUE DES LIQUIDES *bons conducteurs de l'électricité. Nous définirons plus loin, au paragraphe* " METHODES DE TRAVAIL" *ce que sous-entend la qualification "bons conducteurs".*

En particulier tous les métaux et alliages sont concernés par cette étude.

PLAN

Après une INTRODUCTION
- *définissant l'état de lévitation physique,*
- *passant en revue les moyens concevables*
- *faisant le point de la question,*

nous divisons la suite du mémoire en DEUX PARTIES.

La première partie, à CARACTERE THEORIQUE, *comprend trois chapitres.*

UNIV.
LEIDEN

Le chapitre 1 intéresse
- *la* DEFINITION DES MODELES RETENUS,
- *l'exposé de la* METHODE DE TRAVAIL

Le chapitre 2 procède à
- *l'* ELABORATION DES FORMULES MATHEMATIQUES *résumant les propriétés physiques essentielles des modèles traités.*
- *En l'occurence, il s'agit des expressions :*
  1°) des forces résultantes
  2°) des distributions de forces
  3°) des dissipations d'énergie.

Le chapitre 3 porte principalement sur la
- DISCUSSION PARAMETRIQUE DES PROPRIETES DES MODELES.

La deuxième partie à CARACTERE EXPERIMENTAL *est subdivisée en deux chapitres.*

Le chapitre 4 qui rend compte
- *dans quelle mesure l'* EXPERIENCE *accorde ses résultats avec les prévisions issues de la théorie.*
  Deux types d'expériences sont rencontrés :
  a) expériences quantitatives
  b) expériences qualitatives.

Le chapitre 5 aborde l'importante question des
- APPLICATIONS, *et tente au moyen d'examens comparatifs d'établir quelle pourrait être*
- *la* VALEUR TECHNIQUE DU PHENOMENE, *dans le domaine de la* METALLURGIE SANS CREUSET.

Le chapitre 6 enfin constitue une CONCLUSION *tournée à la fois vers le présent travail et l'avenir industriel possible du procédé.*

REMARQUE : *Dans cette étude le système d'unités* MKSA RATIONALISE *a été utilisé exclusivement.*

INTRODUCTION

LA LEVITATION

- *Pour le technicien, étranger à la Parapsychologie, l'état de lévitation n'est pas autre chose que la manifestation d'un moyen physique, propre à contrarier l'action de la gravité naturelle, autre que celui des supports matériels immédiats.*

- *quels sont les moyens susceptibles de maintenir un corps matériel en équilibre stable, par rapport à la terre, indépendamment du temps et quasi immobile, sans que des contacts matériels existent ou soient essentiels à cet équilibre ?*

- *Autrement dit, quels sont les phénomènes physiques, dont dispose le technicien pour exercer des forces sur une masse flottant dans l'espace vide ?*

- *Les données de la science permettent d'énumérer les catégories suivantes :*
  1°) Forces de gravitation
  2°) Forces d'impulsions dynamiques
  3°) Forces de pression de radiation
  4°) Forces électro et magnétostatiques
  5°) Forces électromagnétiques.

- *On trouvera en annexe 1, quelques indications succinctes quant à l'adaptation pratique à notre fin, des moyens énumérés ci-dessus.*

- *La conclusion est que le moyen énoncé dans la dernière catégorie :* FORCES ELECTROMAGNETIQUES, *semble sinon le seul réalisable, pratiquement du moins le plus apte et le plus prometteur d'applications, sous l'angle de la métallurgie sans creuset.*

(1) KELLY - J.C.R. - Brevet US 2.686.865
20 octobre 1951
17 août 1954

(2) D.M. WROUGHTON et E.C. OKRESS - 1951 - Brevet US2.686.864
17 janvier 1951
7 août 1954

(3) P.H. BRACE - Brevet US 2.664.496
25 novembre 1952
29 décembre 1953

(4) E.C. OKRESS et D.M. WROUGHTON - IRON AGE Vol. 170 - n° 5
31 juillet 1952 - pages 83-86

(5) E.C. OKRESS - D.M. WROUGHTON - G. COMENETZ - P.H. BRACE - J.C.R. KELLY
Journal of Applied Physics - vol. 23 n° 5 - mai 1952
pages 545 - 552

(6) et (7) D.M. WROUGHTON - E.C. OKRESS - P.H. BRACE - G. COMENETZ -
J.C.R. KELLY
Journal of Electrochemical society
vol.99 n° 5 - mai 1952 pages 205-211 et

WESTINGHOUSE ENGINEER
Vol.12 n° 5 - septembre 1952
pages 171, 172

(8) WESTINGHOUSE - 1953
ENGINEER (London) vol. 195 - n° 5.069
20 mars 1953 pages 431, 432

TRAVAUX ANTERIEURS

- En égard à l'orientation de notre propos la matière de ce paragraphe ressort essentiellement à la lévitation des METAUX FONDUS. Nous n'avons donc pas abordé la bibliographie concernant la lévitation des corps supraconducteurs dans les champs magnétostatiques.

- Un brevet, portant sur la fusion des métaux en état de lévitation par des courants induits, fut délivré à O.MUCK en Allemagne en 1925 (Brevet Allemand n° 432.001 - 23 octobre 1923 - 23 novembre 1925)

- Mais la première étude du procédé, en tant que tel, est plus récente et a été menée dans les laboratoires de "WESTINGHOUSE ELECTRIC Co" pendant les années 1950 (références n° 1 à 6)

- Les masses de métaux fondus et lévités n'excédèrent jamais 30 grammes.

- Une THEORIE APPROCHEE des forces de lévitation s'exerçant sur des SPHERES SOLIDES fut établie et vérifiée sans grande précision.

- Très schématiquement on peut dire que le "NOYAU" de cette théorie était constitué par le DIPOLE MAGNETIQUE induit sur une SPHERE DE PETIT DIAMETRE par le champ d'une SPIRE CIRCULAIRE ET FILIFORME, en SUPPOSANT LE CHAMP CAUSAL UNIFORME sur tout le volume de la sphère .

- Les FORCES DE LEVITATION, uniquement, dans le cas où la SPHERE était CENTREE SUR L'AXE, étaient déduites de l'interaction entre le dipole et le champ magnétique actuel, inhomogène, de la spire inductrice.

- BRISLEY et THORNTON (référence 1°) perfectionnèrent la théorie. Depuis leur publication de 1963, on dispose d'une théorie satisfaisante pour calculer les FORCES VERTICALES exercées par des SPIRES CIRCULAIRES FILIFORMES CONCENTRIQUES sur une SPHERE SOLIDE COAXIALE avec les spires, quels que soient leurs diamètres.

(9) D.H. POLONIS - J.G. PARR - Journal of Metals
octobre 1954 - volume 200
pages 1148 - 1154

(10) D.H. POLONIS - R.G. BUTTERS - J.G. PARR - Research (London-
volume 7 n° 7 - juillet 1954 - pages 273 - 277

(11) A.H. BOERDIJK - Philips Research Reports - Vol. 11 n° 1
février 1956 - pages 45, 46

(12) B.HARRIS - E.G. PRICE - A.E. JENKINS -
Australian atomic Energy Symposium 1958 Sydney
juin 1958 - pages 221 - 225

(13) G. COMENETZ - J.W. SALATKA
Journal of The Electrochemical Society
volume 105 - n° 11 - novembre 1958 - pages 673 - 676

(14) B. HARRIS - A.E. JENKINS
Journal of Scientific Instruments
vol. 36 n° 5 mai 1959 - pages 238 - 240.

(15) R.T. BEGLEY - G. COMENETZ - P.A. FLINN - J.W. SALATKA
Review of Scientific Instruments
vol. 30 n° 1 - janvier 1959) page 38

(16) L.R. WEISBERG - Review of Scientific Instruments
vol. 30 n° 2) février 1959 - page 135

(17) E.A. ROTH - EA MARGERUM - J.A. AMICK
Review of Scientific Instruments
vol. 33 n° 6 - juin 1962 - pages 686 - 689

(18) J.C. LEWIS - H.R.J. NEUMAYER - R.G. WARD
Journal of Scientific Instruments
vol. 39 n° 11 - novembre 1962 - page 569

(19) W. BRISLEY - B.S. THORNTON
British Journal of Applied Physics
vol. 14 n°10 - oct.1963 - pages 682 - 686

(20) E. FROMM - H. JEEN - British Journal of Applied Physics
vol. 16. n° 5 - Mai 1965 - pages 653- 663

(21) E.R. LAITHWAITE - P.I.E.E. vol. 112 - n° 12 - décembre 1962 pages 236-237

(22) A.R. BOOTH - J.A. CHARLES - Nature vol. 212 - 12 novembre 1966

(23) L.S. PIGGOTT et G.F. NIX - P.I.E.E. -vol. 112 n° 7 - juillet 1966
pages 1229 à 1235

- *A notre connaissance aucune théorie ne traite, pour ce dispositif, des forces de restauration de la coaxialité, après une perturbation ayant entraîné une excentration de la sphère.*

- *Ce n'est que vers la fin de notre travail (fin 1966) que la première publication concernant la* LEVITATION D'UN CYLINDRE SOLIDE, *donnant une formule générale pour les forces et les puissances dissipées est parue (PIGGOTT et NIX, référence 23)*

- *Pour autant que nous le sachions, toutes les études ont été consacrées aux* CORPS SOLIDES *avec des* COURANTS INDUCTEURS FILIFORMES.

- *Aucune publication n'a porté sur :*
  - *1°) l'équilibre des masses liquides*
  - *2°) les stabilités*
  - *3°) les courants inducteurs en nappes avec les conducteurs étendus.*

- *Hormis la référence 23, tous les dispositifs ayant fait l'objet d'études théoriques ou expérimentales, publiés à ce jour, sont de la forme générale schématisée sur la figure n° 1.*

- *Ils sont constitués par deux bobines à axes verticaux confondus, avec symétrie de révolution. Les bobines sont connectées en opposition série.*

- *L'objet léwité, généralement une sphère à l'état solide, prend, une fois passé à l'état liquide, la forme d'une poire , la pointe dirigée vers le bas, comme le schématise la figure n° 2, sous réserve toutefois que l'équilibre soit possible.*

Les références (9) à (22) concernent quelques exemples des travaux effectués sur le sujet , publiés jusqu'à une époque récente. Ils concernent tous le dispositif de la figure n° 2

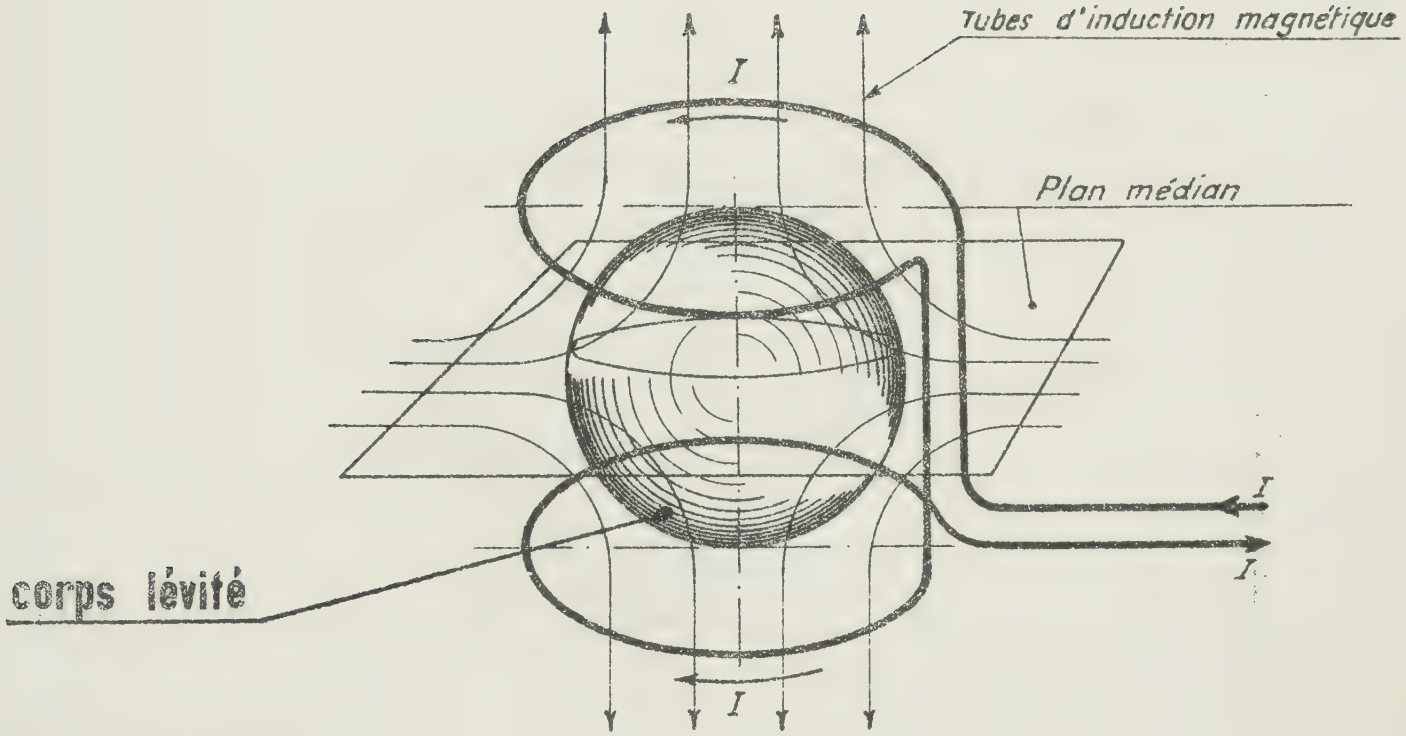
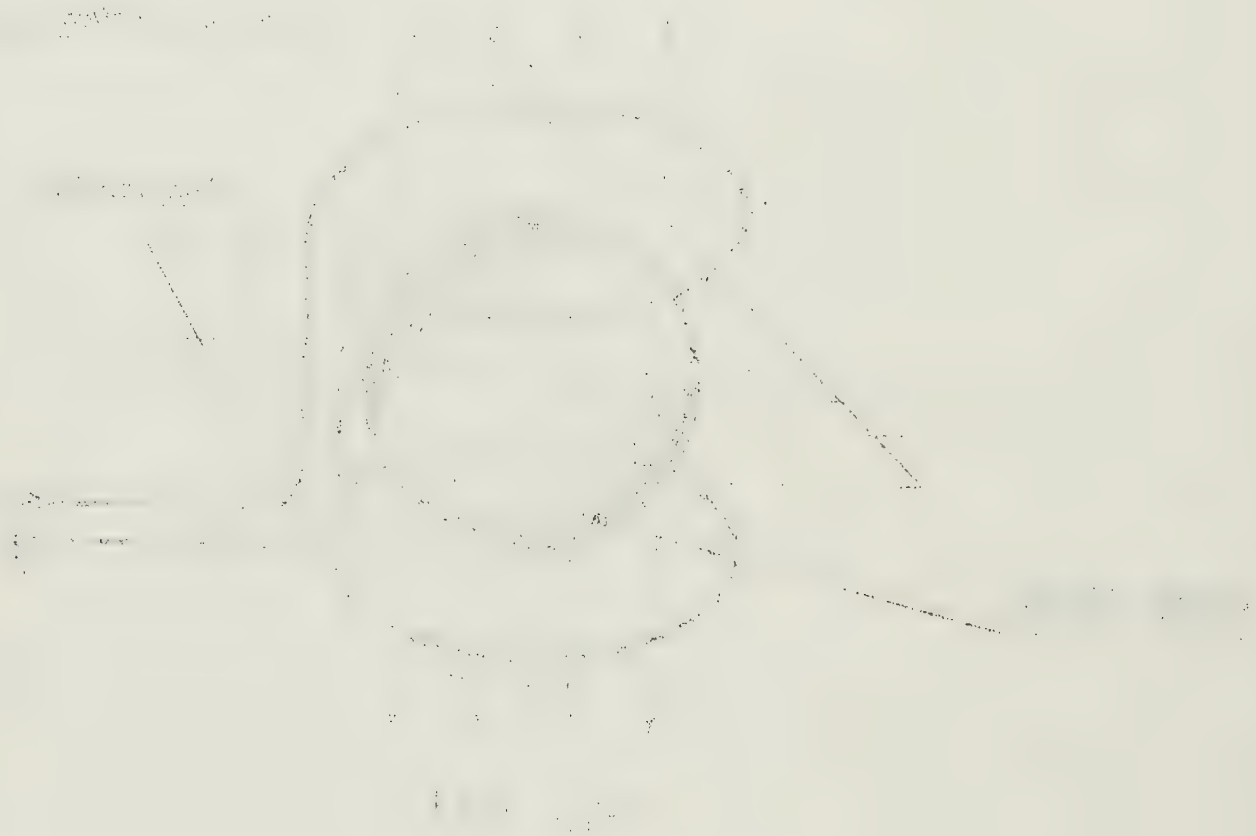

Tubes d'induction magnétique
I
Plan médian
I
I
I
corps lévité

Fig. N°1



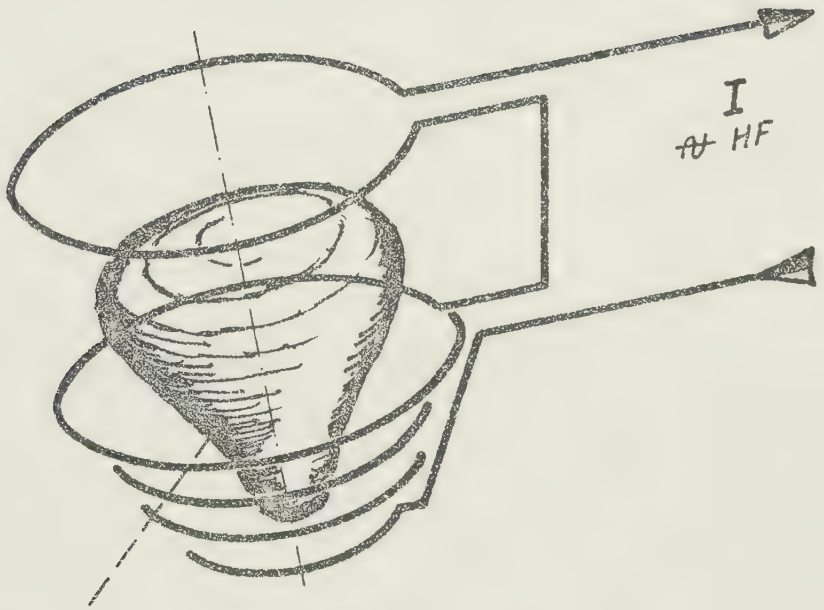


Fig. Nº 2

PREMIERE PARTIE

CHAPITRE I

METHODE DE TRAVAIL -
- DEFINITION DES MODELES

POSITION DES PROBLEMES

- *Quels sont les* PRINCIPAUX PROBLEMES *rencontrés dans la sustentation sans contact des métaux et alliages fondus ?*

- *On peut proposer une division en trois catégories.*

  1°) MAINTENIR DES MASSES LIQUIDES INDEFINIMENT EN EQUILIBRE STABLE, STATIQUE ET DYNAMIQUE

  2°) MAITRISER LES TEMPERATURES

  3°) ASSURER LA RIGIDITE DIELECTRIQUE, C'EST-A-DIRE LA STABILITE ELECTRIQUE DES SYSTEMES (PROBLEME DES ARCS)

- *Bien que non négligeable, ce dernier problème est plutôt de nature technologiq et peut trouver des solutions sans soulever des difficultés insurmontables, ou de principe.*

- *Il n'en est pas de même des deux premiers.*

  Sans trop anticiper sur la suite des résultats, on peut dire, en ce qui concer le second problème, que les difficultés auxquelles se sont heurtés les différents expérimentateurs, tiennent pour une large part aux propriétés et performances des générateurs d'induction utilisés par eux.

- *Le premier problème est autrement difficile. Un examen élémentaire du système de bobines coaxiales à symétrie de révolution (fig. n° 2) montre que le dispositif est rédhibitoirement condamné, vis-à-vis de la fusion flottante de masses d'intérêt industriel.*

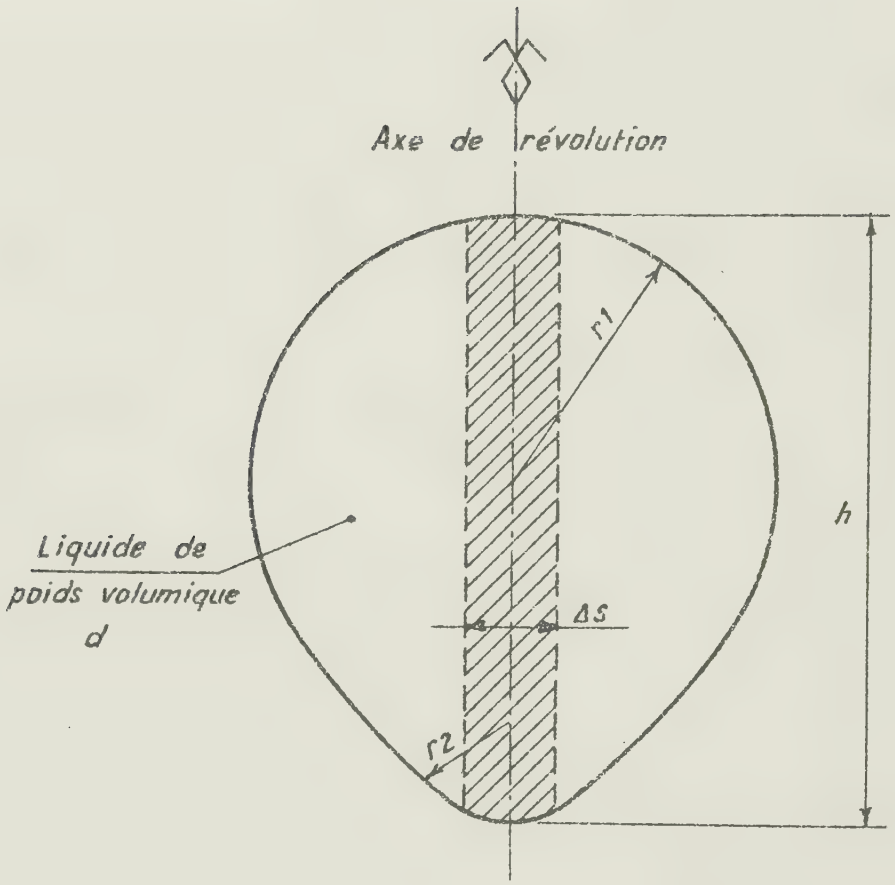


Fig. Nº 3

- *En effet, les forces de lévitation sont constituées par les forces de LAPLACE, dûes à l'intéraction entre l'induction magnétique et les courants induits. Leur description mathématique :*

$$\overrightarrow{df} = \overrightarrow{idl} \wedge \overrightarrow{B}$$

montre que pour obtenir df sur l'axe vertical, il faut nécessairement une composante d'induction horizontale. Sur l'axe, non seulement les composantes horizontales s'annulent, mais les courants induits sont nuls également.
EN RESUME LES FORCES DE LEVITATION S'ANNULENT NECESSAIREMENT SUR L'AXE.

Avec le dispositif à symétrie de révolution tel que nous l'avons schématisé, il est impossible de léviter une sphère liquide, en effet une déformation par effondrement sur l'axe apparaîtra nécessairement. D'autre part les FORCES DE TENSION SUPERFICIELLES JOUENT UN ROLE ESSENTIEL *dans l'équilibre du liquide.*

Pour nous en convaincre, il suffit de considérer la figure n° 3 ci-contre.

Sur la surface ΔS la colonne liquide exerce une pression hd, comme la projection verticale des forces de lévitation agissant sur cette colonne axiale élémentaire est nulle, il faut bien que l'équilibre fasse essentiellement appel à la tension superficielle du liquide. On peut écrire :

$$hd + \frac{2t}{r_1} = \frac{2t}{r_2}$$

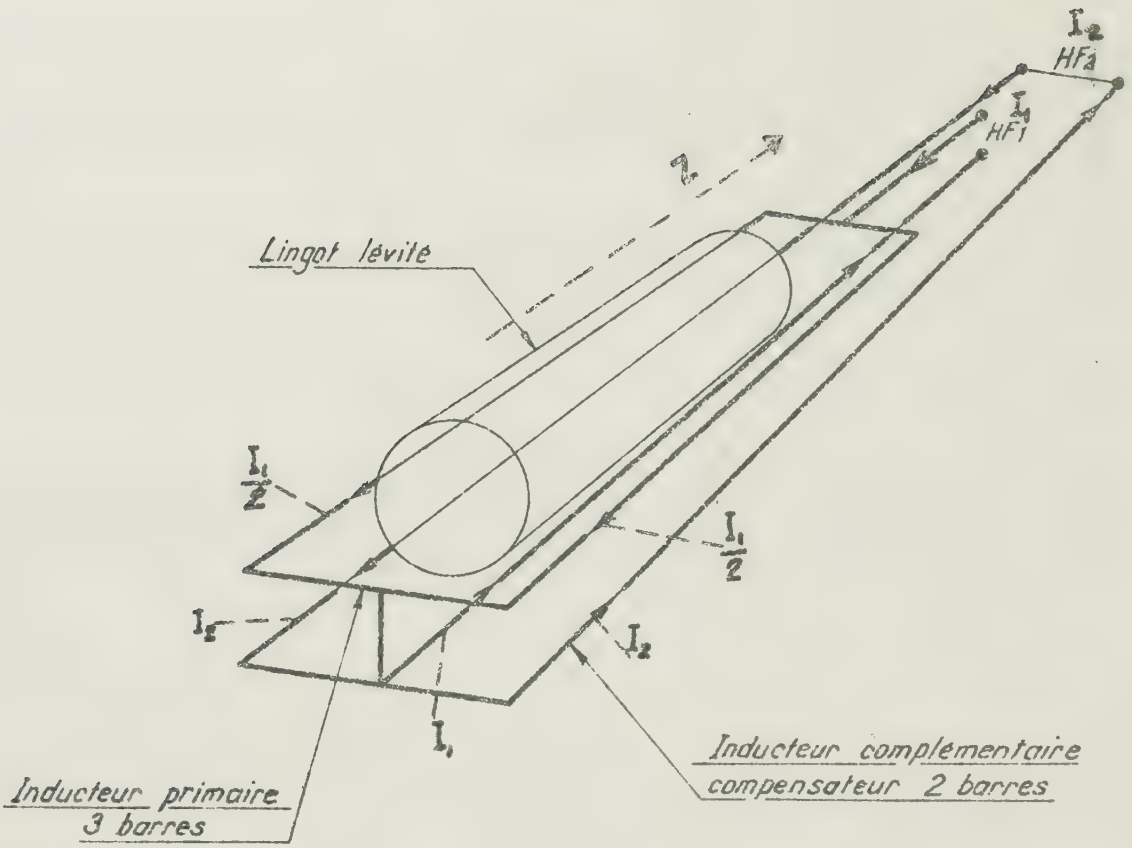
t *étant la tension superficielle du liquide*
r_1 *et* r_2 *les rayons de courbures sur l'axe au sommet et à la base de la masse liquide lévitée.*

CETTE EXPRESSION MONTRE, PUISQUE h ET r VARIENT COMME LA RACINE CUBIQUE DE LA MASSE DE LIQUIDE, QUE C'EST LA VALEUR DE LA TENSION SUPERFICIELLE t QUI LIMITERA SUPERIEUREMENT LA QUANTITE DE LIQUIDE SATISFAISANT AUX CONDITIONS D'EQUILIBRE.

Il est effectivement IMPOSSIBLE DE LEVITER AVEC SUCCES, *de façon stable, des masses de métal fondu supérieure disons, à quelques dizaines de grammes, en utilisant une* STRUCTURE D'INDUCTEURS A SYMETRIE DE REVOLUTION.

Il n'est même pas sûr qu'on ait jamais lévité avec succès une masse de métal liquide dans un TRES BON VIDE.

L'équilibre de tels systèmes est essentiellement dû à l'action de la TENSION SUPERFICIELLE *qui joue un* ROLE MAJEUR.



les courants I_1 et I_2 sont de fréquences différentes

Fig. N° 4

SYSTEME SANS SYMETRIE DE REVOLUTION

Une approche par tatonnements dont l'historique importe peu ici, nous conduisit à retenir des dispositifs inducteurs à courant rectilignes parallèles dont les caractères principaux sont les suivants :

a) forces de lévitation maximales aux endroits de pression hydrostatique maximale

b) forme cylindrique des lingots traités

c) possibilité de s'affranchir dans une large mesure de la tension superficielle.

d) possibilité de traiter des masses de plusieurs ordres de grandeurs supérieures à celles rapportées dans la littérature technique.

Ce sera l'objet principal de la suite de ce travail de déterminer les propriétés de ces dispositifs.

La figure 4 ci-contre, illustre la morphologie du premier d'entre eux que nous avons étudié. Le plus fruste, mais aussi le plus facile à réaliser avec les moyens dont nous disposions.

BASES PHYSIQUES — HYPOTHESES GENERALES

- *En premier lieu, nous avons choisi de façon arbitraire, en nous guidant simplement sur la facilité expérimentale, d'utiliser des* COURANTS SINUSOIDAUX

- *On sait que les équations qui décrivent le champ électromagnétique dans la matière, dépendent essentiellement de la nature de cette dernière, d'une part, et de la valeur de la fréquence du champ d'autre part.*

- *Dans cette étude , la matière concernée est douée de propriétés* HOMOGENES, LINEAIRES *et* ISOTROPES *par exemple la conductibilité électrique "g" est une constante scalaire.*

- *la matière concernée est supposée* NON FERROMAGNETIQUE, *et sa perméabilité est prise identique à celle du vide*

$$\mu = \mu_0 = 4\pi 10^{-7}$$

sauf spécification contraire dans le texte.

- *Nous demeurerons dans l'approximation du* REGIME QUASI-STATIONNAIRE

Nous posons donc :

$$\lambda >> r$$
$$\lambda >> l$$

avec λ *longueur d'onde électromagnétique*
r *dimension transversale du système inducteur*
l *longueur du système inducteur.*

- *La propriété d'*INVARIANCE par TRANSLATION *des modèles étudiés, qu'indique la figure n° 4, n'est évidemment qu'une approximation, toujours valable, dans la mesure où la longueur d'un cylindre lévité est grande devant son diamètre, mais petite devant la longueur d'onde. Il suffit que l'amplitude des "effets d'extrémités" soit du même ordre de grandeur que l'imprécision admise.*

- *La première restriction sur la fréquence f des courants inducteurs sera donc :*

$$f << C/l \qquad (1)$$

C *vitesse de la lumière*
l *longueur du système inducteur*

- *les équations de* MAXWELL *utilisables seront donc :*

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$
$$\overrightarrow{\operatorname{Rot}}\, \vec{H} = \vec{i}$$
$$\overrightarrow{\operatorname{Rot}}\, \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

complétées par la relation :

$$\vec{i} = g.\vec{E}$$

- *Pour que cette dernière expression ait un sens il faut que la période des courants inducteurs soit grande devant la durée moyenne τ d'un libre parcours des électrons de conduction dans la matière induite*

$$T = \frac{1}{f} \gg \tau \qquad (2)$$

- *Pour que la relation de MAXWELL-AMPERE se réduise à la forme retenue ci-dessus, il faut que le terme omis,*

$$i' = \frac{\partial D}{\partial t}$$

courant de déplacement, soit négligeable devant le courant de conduction cela implique :

$$f \ll \frac{g}{\varepsilon} \qquad (3)$$

ε *étant la permittivité du matériau traité.*

- *Enfin dernière restriction sur la fréquence, il faut pour respecter le caractère macroscopique des équations que la profondeur de pénétration* δ *des courants induits soit grande devant le libre parcours moyen* γ *des électrons "induits".*

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi \mu_o g.f}}$$

$$\delta \gg \gamma \qquad (4)$$

EQUATIONS DE BASE

On sait qu'il est possible de faire dériver l'induction magnétique $\vec{B}$ d'un potentiel vecteur $\vec{A}$, tel que :

$$\vec{B} = \overrightarrow{Rot}.\vec{A}$$

Des équations définies au paragraphe précédent on tire aisément :

$$\vec{E} = - \frac{d\vec{A}}{dt}$$

$$\frac{1}{g} \cdot \overrightarrow{Rot}\, \vec{i} = - \frac{d\vec{B}}{dt}$$

$$\frac{\vec{i}}{g} = - \frac{d\vec{A}}{dt}$$

$$\overrightarrow{Rot}\, \vec{B} = \mu_o \vec{i}$$

et comme il est bien connu que

$$\overrightarrow{Rot}\, (\overrightarrow{Rot}) = - \vec{\Delta} + \overrightarrow{grad}\, (div)$$

on a

$$\overrightarrow{Rot}\, (\overrightarrow{Rot}\, \vec{A}) = - \Delta \vec{A} + grad\ div\ \vec{A}$$

dans la définition de $\vec{A}$ on pose $div\ \vec{A} = 0$
d'où l'équation :

$$\Delta \vec{A} = - \mu_o i = \mu_o g \frac{d\vec{A}}{dt} = j \mu_o g \omega \vec{A}$$

- *Une propriété intéressante de nos dispositifs inducteurs provient de ce que les courants étant parallèles et invariants selon z, le potentiel vecteur devient un pseudoscalaire, puisque le support du vecteur $\vec{A}$ est toujours parallèle aux courants c'est-à-dire normal au plan de section droite, selon l'axe z de la figure n° 4 par exemple.*

- L'ETUDE DU POTENTIEL VECTEUR $\vec{A}$ SE RAMENE DONC A L'ETUDE D'UNE FONCTION DE POINT SCALAIRE A, A DEUX DIMENSIONS

On peut écrire les deux équations de base, valables :
la première dans la matière induite, la seconde hors de celle-ci.

$$(I) \qquad \Delta A = j \mu_0 g \omega A$$

$$(II) \qquad \Delta A = 0$$

HYPOTHESE PARTICULIERE

- *Nous résumons dans l'expression "corps diamagnétique parfait" la propriété physique suivante :*

- *Si le produit de la fréquence du champ magnétique par la conductibilité du corps induit est suffisamment élevé, on sait que l'effet de peau sera prononcé.*

- *Si ce corps induit présente des dimensions transversales " r" telles que*

$$\delta \ll r$$

- Cela revient à dire que la matière de ce corps, se comporte comme un matériau diamagnétique, expulsant les lignes de force du champ vers l'extérieur.

Si l'effet est bien marqué on peut négliger la faible épaisseur de pénétration du flux d'induction devant le diamètre du cylindre, et calculer les distributions de champ hors la matière, comme si celle-ci était parfaitement diamagnétique, c'est-à-dire de perméabilité relative nulle, $\mu = 0$, et plongée dans un champ magnétostatique.

Les lignes de force seront donc tangentes en tout point des surfaces matérielles. Dans notre cas de distribution à deux dimensions, ces lignes sont en même temps des lignes équipotentielles vecteur, comme le montre l'annexe N.2. Les cylindres induits en état de lévitation peuvent donc être considérés comme des corps équipotentiels.

Rapprochée des propriétés pseudo-scalaires de A, déjà signalées, cette dernière propriété nous permettra, dans le cadre de l'hypothèse du diamagnétisme parfait, de ramener nos problèmes de distribution de champ hors de la matière mais en présence de celle-ci, à des problèmes d'électrostatique, tout au moins lorsque nous demeurerons dans le cadre de l'hypothèse en question, ce qui ne sera pas toujours le cas.

CONDITIONS A LA LIMITE

Nous n'utilisons que des conditions très classiques :

A la surface limite de la matière on a :

$$\operatorname{div} \vec{A}_i = \operatorname{div} \vec{A}_e = 0 \Rightarrow \vec{A}_i = \vec{A}_e$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{B}_i = \vec{B}_e$$

puisque la perméabilité μ_0 est une constante scalaire valable dans tout l'espace.
l'indice (i) se rapporte à l'intérieur de la matière
l'indice (e) se rapporte à l'extérieur de la matière

CALCUL DES PUISSANCES

Il s'agira toujours pour nous de calculer la puissance dissipée par unité de longueur de cylindre.

Nous utiliserons le flux d'énergie, à travers la surface enveloppe du cylindre, mesuré par le vecteur de POYNTING.

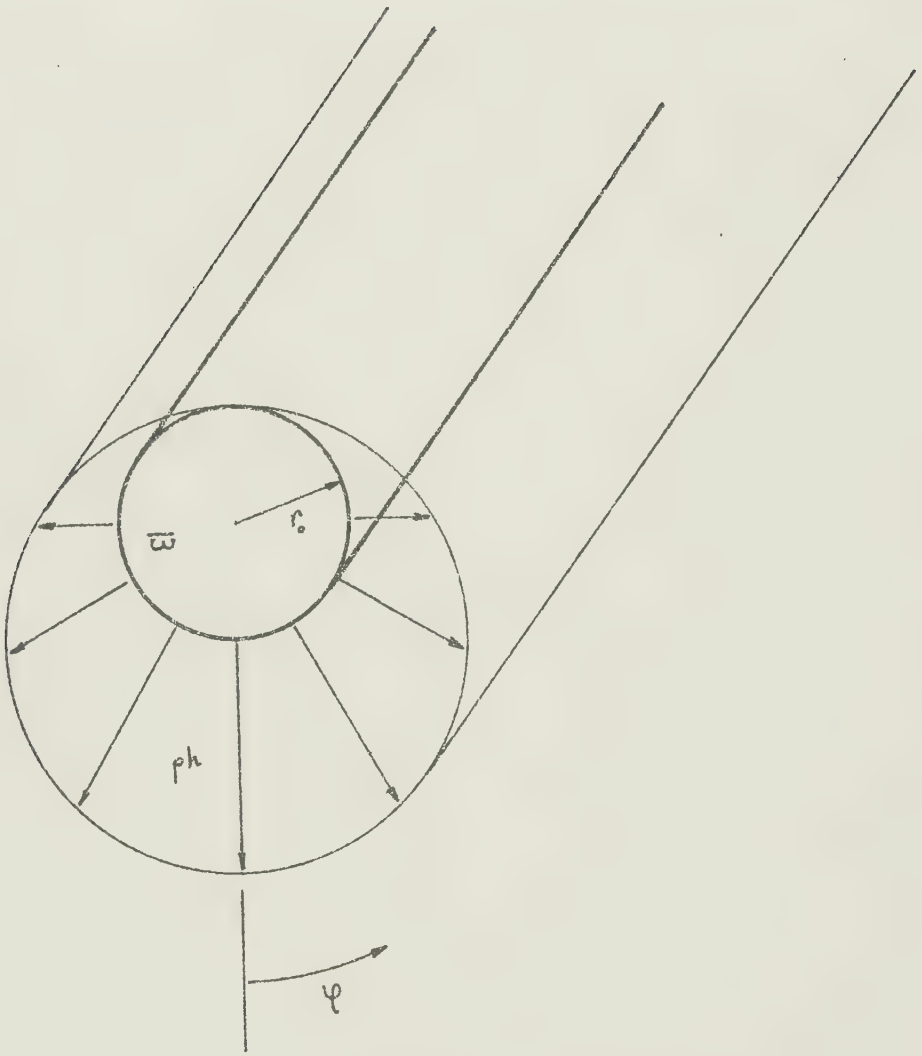
$$W = \frac{1}{\mu_0} \int_l (\vec{E} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{n}.dl$$

Dans cette expression dl est un élément de périmètre de la section droite du cylindre lévité et $\vec{n}$ est un vecteur unité normal à dl.

Dans cette formule il est nécessaire de connaître l'expression du champ électrique E. On la déduira de la relation de MAXWELL-FARADAY, soit :

$$E = - \frac{dA_i}{dt} = - j\omega A_i$$

FIGURE N° 5



Pression Hydrostatique

EQUILIBRE

- *Nous nous intéressons principalement aux systèmes inducteurs destinés à supporter des cylindres liquides.*

- *Pour y parvenir idéalement, sans faire intervenir la tension superficielle de ceux-ci, il faut que la pression hydrostatique soit exactement compensée en chaque point de l'enveloppe par la pression d'origine électromagnétique.*

- *Après avoir examiné les conditions d'équilibre du cylindre le plus simple, c'-est-à-dire , le* CYLINDRE CIRCULAIRE *nous essaierons d'établir les* CRITERES DE L'EQUILIBRE CERTAIN D'UN CYLINDRE LIQUIDE QUELCONQUE

- *Pour le cylindre droit circulaire disposé horizontalement, la pression hydrostatique s'exerçant sur l'enveloppe est de la forme :*

$$Ph = \varpi \cdot r_o \cdot (1 + \cos \phi)$$

ϖ *poids volumique du liquide*

r_o *rayon du cylindre*

ϕ *coordonnée angulaire dont l'origine est prise sur la droite génératrice le plus bas de l'enveloppe.*

- *La figure n° 5 donne l'allure de la répartition de pression sur les éléments de l'enveloppe.*

- *Dans l'hypothèse d'un cylindre à comportement diamagnétique parfait, sollicité par des courants inducteurs parallèles à son axe, les courants induits circuleront sur l'aire latérale du cylindre, sous forme de nappe.*

- *Dans ce cas, il est bien connu que la pression d'origine électromagnétique sur l'enveloppe vaut : (contrainte de MAXWELL)*

$$p_e = \frac{B_o^2}{2\mu_o}$$

B_o *induction tangentielle sur l'enveloppe*

- *Dans le cas idéal, il faut :*

$$p_h = p_e$$

Il vient aisément, pour l'induction superficielle B_o idéale :

$$B_o = 2\sqrt{\varpi \cdot \mu_o \cdot r_o} \cdot \cos\frac{t}{2}$$

- *Pour satisfaire cette exigence, il faudrait que les lignes d'induction soient orientées comme l'indique la figure n° 6*

figure n° 6

- *C'est évidemment impossible puisque la circulation de $\overrightarrow{B_o}$ serait non nulle alors que l'intégrale du courant dans le cercle de rayon r_o est nécessairement nulle.*

-*La distribution schématisée par la figure n° 7 qui pourrait satisfaire le théorème d'AMPERE semblerait permettre, au prix d'un certain écart avec le cas idéal, une solution viable. Il n'en est rien, car dans ce cas de figure, les forces seraient exclusivement anti-lévitation. Si l'on retournait le système, haut pour bas, on aurait alors un dispositif essentiellement instable.*

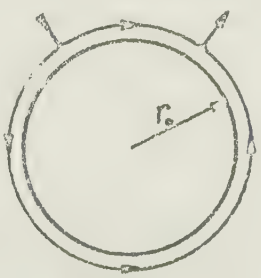


figure n° 7

- LA LEVITATION PARFAITE D'UN CYLINDRE CIRCULAIRE DROIT EST IMPOSSIBLE

Il faut donc abandonner le cylindre circulaire et examiner le cas du cylindre quelconque.

CRITERE D'EQUILIBRE HYDROMAGNETIQUE

- *Comment définir une distribution de champ magnétique capable de retenir des cylindres liquides en équilibre dans l'espace ?*

- *La pesanteur agit sur chaque élément, en chaque point du liquide, et fournit au corps, en imaginant un déplacement virtuel, un certain travail* - $\Delta\tau$

- *On sait que les déformations de la masse liquide sous l'action de la pesanteur ne sont pas des transformations réversibles du point de vue thermodynamique.*

- *Comme dans tous les cas, l'irréversibilité correspond toujours à un gaspillage de travail mécanique, ce sera ici une hypothèse pessimiste, donc un renforcement de la valeur des critères d'équilibre des masses liquides, que de supposer ces transformations réversibles. Toujours dans le même dessein, nous les supposerons isentropiques. C'est-à-dire que nous négligerons le transfert auliquide, de la chaleur apportée par le travail de la pesanteur.*

- *Nous confondrons variation d'énergie libre et variation d'énergie interne, en ne considérant que les variations de position du système : liquide induit et inducteur.*

Pour interdire les transformations d'écoulement du liquide sous l'action de la pesanteur , il faut :

$$\Delta F - \Delta\tau > 0$$

avec F énergie libre du liquide, qui doit par conséquent croître pour tout déplacement dans le sens des écoulements.

Il est connu que, et c'est un résultat classique, l'énergie libre d'un système de courant, linéaire homogène et isotrope, dans un champ magnétique quasi stationnaire a pour expression

$$F = \frac{1}{2} \oint_V \vec{A} \cdot \vec{i} \, dV$$

où A est le potentiel vecteur
i la densité de courant } *en tout point de l'espace*

ou encore

$$F = F_a + F_m$$

dans laquelle, d'une part :

$$F_a = \frac{1}{2} \oint_{Va} \vec{A}_a \cdot \vec{i}_a \, dV_a$$

avec

F_a *autoénergie libre, propre au corps sustenté*

A_a *potentiel vecteur créé par les courants de Foucault en chaque point dV_a du volume V_a du corps sustenté*

i_a *densité des courants de Foucault*

et d'autre part :

$$F_m = \oint_{Va} \vec{A}_o \cdot \vec{i}_a \, dV_a$$

avec

F_m *Energie libre d'intéraction mutuelle entre le corps sustenté et l'inducteur*

A_o *potentiel vecteur créé par l'inducteur vide à l'endroit du corps sustenté, mais en l'absence de ce dernier.*

Nous sommes conduits à poser

$$\Delta F_m + \Delta F_a - \Delta r > 0$$

d'où nécessairement

$$\Delta F_m < 0$$

En effet ΔF_m peut être négatif puisqu'il représente les variations d'énergie libre par déformation d'un circuit électrique. On sait que si celle-ci est spontanée elle entraîne un abaissement de cette énergie (abaissement spontané de l'auto-inductance d'un circuit libre).

Si on appelle B_o l'induction magnétique correspondant à A_o, ($\vec{B_o} = \overrightarrow{rot}\ \vec{A_o}$)

on peut écrire que i_a est proportionnel à $\overrightarrow{rot}\ \vec{B_o}$ sous la forme

$$\vec{i_a} = \overrightarrow{rot}\ \vec{B_o}$$

nous pouvons admettre que l'énergie libre est distribuée dans le corps sustenté avec la densité

$$\vec{A_o} \cdot \vec{i_a} = \vec{A_o} \cdot \overrightarrow{rot}\ B_o$$

une relation d'analyse vectorielle nous permet d'écrire

$$\vec{A_o} \cdot \overrightarrow{rot}\ \vec{B_o} = \vec{B_o} \cdot \overrightarrow{rot}\ \vec{A_o} - div\ (\vec{A_o} \wedge \vec{B_o})$$

le dernier terme du second membre est nul comme étant égal à : $div\ (\overrightarrow{rot})$

La densité d'énergie libre dans le liquide peut donc être considérée comme proportionnelle à :

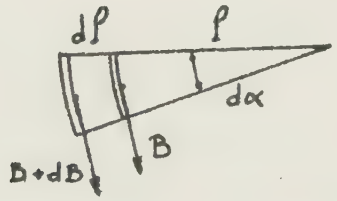
$$B_o^2 = \vec{B_o} \cdot \overrightarrow{rot}\ \vec{A_o} = \vec{A_o} \cdot \vec{i_a}$$

Etant donné la configuration cylindrique des dispositifs considérés dans ce travail, seuls les déplacements centrifuges moyens du liquide nous intéressent. En conséquence, dans un système de coordonnées cylindriques c'est la composante selon $\emptyset$ de l'induction magnétique B_o qui retiendra notre attention.

En effet il n'est pas possible de créer des lignes d'induction magnétiques présentant à la fois le gradient nécessaire à l'existence des forces de lévitation, et la courbure satisfaisante apte à retenir le liquide.

La distribution d'induction suivante est en effet impossible :

Considérons deux tubes de flux infiniment voisins dans une distribution à deux dimensions.



Il faut pour que la distribution d'induction puisse exister, satisfaire l'équation de Maxwell :

Rot B = 0 (en l'absence de courant dans l'espace libre)

$$B\,\rho\,d\alpha - (B + dB)(\rho + d\rho)\,d\alpha = 0$$

$$- \rho dB - B d\rho = 0$$

Il faut bien $dB < 0$ *soit* $\text{grad } B = \frac{dB}{d\rho} < 0$

FIGURE N° 8

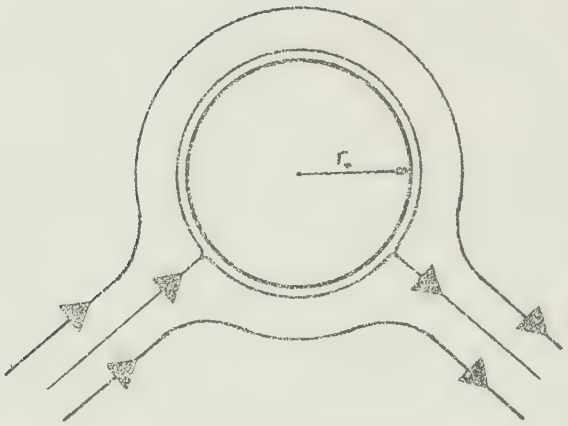


FIGURE N° 9

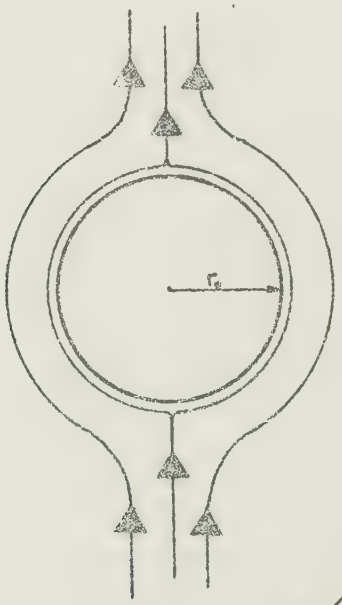
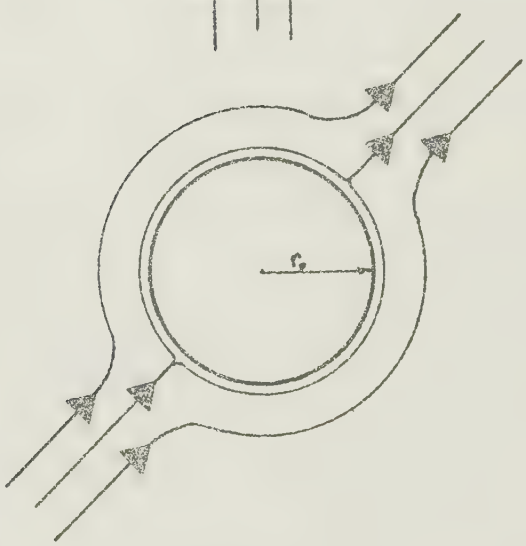


FIGURE N° 10



Nous avons donc essayé de contourner l'obstacle en SUPERPOSANT DEUX DISTRIBUTIONS DE LIGNES D'INDUCTION agissant simultanément de façon à satisfaire EN MOYENNE DANS LE TEMPS les critères d'équilibre des liquides énoncés plus haut.

Les deux distributions élémentaires sont schématisées sur les figures n° 8 et 9.

- Il faut que ces deux distributions d'induction agissent indépendamment l'une de l'autre ; c'est-à-dire que les courants induits dans le corps en état de lévitation, par l'une des deux distributions n'interagissent pas, en moyenne, avec les lignes de force de l'autre distribution.

C'est la première condition essentielle, la seconde étant ::

- Il faut que les régions du plan de section droite, où les critères de tenue du liquide sont satisfaits, se complètent l'une, l'autre afin d'interdire, en moyenne dans le temps, tout mouvement du liquide causé par la pesanteur.

Comment composer ces distributions pour atteindre notre but ?

Examinons les différents cas possibles.

1°) les deux distributions sont à FREQUENCES IDENTIQUES avec un DEPHASAGE ZERO ou π, INVARIABLE

On obtiendrait une distribution conforme à l'allure de celle de la figure n° 10 et nos critères ne seraient visiblement pas satisfaits. Solution -à rejeter.

2°) Les deux distributions sont à FREQUENCES IDENTIQUES mais présentent un DEPHASAGE ENTRE ZERO et π CONSTANT.

Même si l'on choisit le déphasage égal à ($\pi/2$) les deux distributions ne peuvent pas être considérées comme indépendantes en toute rigueur.

Il existe une relation de phase constante entre le champ inducteur et ses effets, soient : l'induction magnétique dans la matière conductrice et les courants induits dans celle-ci.

Dans le cas général, cette relation est une fonction de la fréquence, de la conductibilité de la matière induite et de la situation du point considérée, tout ceci pour un système inducteur déterminé.

Pour qu'il y ait indépendance des actions il faut qu'en moyenne dans le temps, les forces de LAPLACE créées par l'action du champ d'une distribution, sur les courants induits par l'autre, soient nulles. Il faudrait pour cela que courants induits et champ d'induction soient en quadrature en tous les points de la matière, ce qui n'est pas le cas en général.

Cependant dans l'approximation du comportement pseudo"diamagnétique parfait" des cylindres bons conducteurs en haute fréquence, les lignes de force épousant l'enveloppe, les inductions et les courants induits en surface par chaque distribution sont en phase avec elles.

Par conséquent, sous réserve que $\delta \ll r_0$, *les actions de composition sont nulles sur une période, si les* COURANTS GENERATEURS *des deux distributions d'induction sont* EN QUADRATURE.

Cette solution qui mériterait d'être expérimentée, n'a pas été retenue dans notre étude, pour des raisons contingentes liées à l'équipement du laboratoire.

On notera qu'on se trouverait en présence d'un "champ tournant" dont les propriétés seraient à explorer du point de vue de l'application envisagée dans ce travail.

3°) *Les deux distributions sont à* FREQUENCES DIFFERENTES

Il suffit pour que ce mode d'alimentation soit acceptable que les effets de composition des deux distributions de champ, tels qu'ils ont été définis ci-dessus soient nuls en moyenne, dans le temps, sur une durée petite devant les périodes propres des oscillations mécaniques possible du liquide.

Cela revient à chercher les conditions d'annulation d'une intégrale produit de deux fonctions sinusoïdales.

$$\int_0^T \mathrm{Sin}\ \omega_1 t.\ \mathrm{Sin}\ \omega_2 t.\ dt = 0$$

avec $\omega_1 > \omega_2$

L'intégration faite il vient :

$$\frac{\sin (\omega_1 - \omega_2) T}{2 (\omega_1 - \omega_2)} - \frac{\sin (\omega_1 + \omega_2) T}{2 (\omega_1 + \omega_2)} = 0$$

Posons $\omega_1 = k \omega_2$; $k > 1$

en appelant T_1 *et* T_2, *les périodes des deux systèmes inducteurs*

Imposons que les effets de composition soient nuls sur un intervalle mesuré par $T = nT_2$, *n entier naturel, on peut écrire la condition sous la forme :*

$$\frac{\sin (k - 1) 2 n \pi}{k - 1} = \frac{\sin (k + 1) 2 n \pi}{k + 1}$$

Une solution de l'équation ci-dessus sera donnée par :

$$2 n (k - 1) = N \quad \text{et} \quad 2 n (k + 1) = N + q$$

Avec N et q entiers naturels convenables, LA PLUS PETITE SOLUTION POUR *k sera celle qui correspond à*

$$N = 1$$

d'où

$$k = 1 + \frac{1}{2n}$$

On vérifie immédiatement qu'alors $q = 4n$

Cette solution est valable quelle que soit la profondeur de pénétration. C'est celle que nous avons adoptée dans cette étude.

REMARQUE I : La détermination de la valeur numérique de n dépend des conditions physiques imposées. Elle dépend d'une part de la fréquence f_2 du courant inducteur de plus basse fréquence, et d'autre part de la plus haute fréquence propre possible pour les oscillations mécaniques du liquide.

Supposons $f_2 = 10^5$Hz fréquence inférieure pratique, des oscillateurs de puissance à triode.

Supposons que la réponse du liquide est négligeable a une sollicitation mécanique à 10^3 Hz
alors :

$$n = \frac{T}{T_2} = \frac{10^{-3}}{10^{-5}} = 10^2$$

Il suffira donc de prévoir $\omega_1 = 1{,}005\ \omega_2$ pour que sur quelques millièmes de secondes, les effets de composition soient nuls, et qu'on puisse à cette échelle de temps considérer les actions des deux distributions d'induction comme indépendantes.

Du point de vue physique, pour d'aussi faibles écarts, tout se passe comme si nous avions deux FREQUENCES IDENTIQUES *et un* DEPHASAGE PROPORTIONNEL AU TEMPS.

Là où les lignes de forces sont perpendiculaires, nous aurons des "champs tournants" c'est-à-dire que le vecteur induction décrira toutes les ellipses de LISSAJOUS en fonction du temps. On pourra utiliser ce dernier phénomène pour mettre les lingots en rotation, et profiter dans ce cas de l'homogénéisation de température qui en résulte. Il est important de choisir la différence des fréquences en gardant cette propriété présente à l'esprit, car les rotations obtenues peuvent prendre des valeurs excessives surtout si le matériau lévité est solide.

REMARQUE II : Il est toujours possible, bien sûr, de créer les deux distributions par des courants pulsés non simultanés deux décalés dans le temps de telle façon que l'un des dispositifs soit alimenté pendant que l'autre est au repos et vice-versa.
Par les propriétés du développement en série de Fourrier des fonctions périodiques on pourrait se ramener du point de vue fondamental à étudier de tels

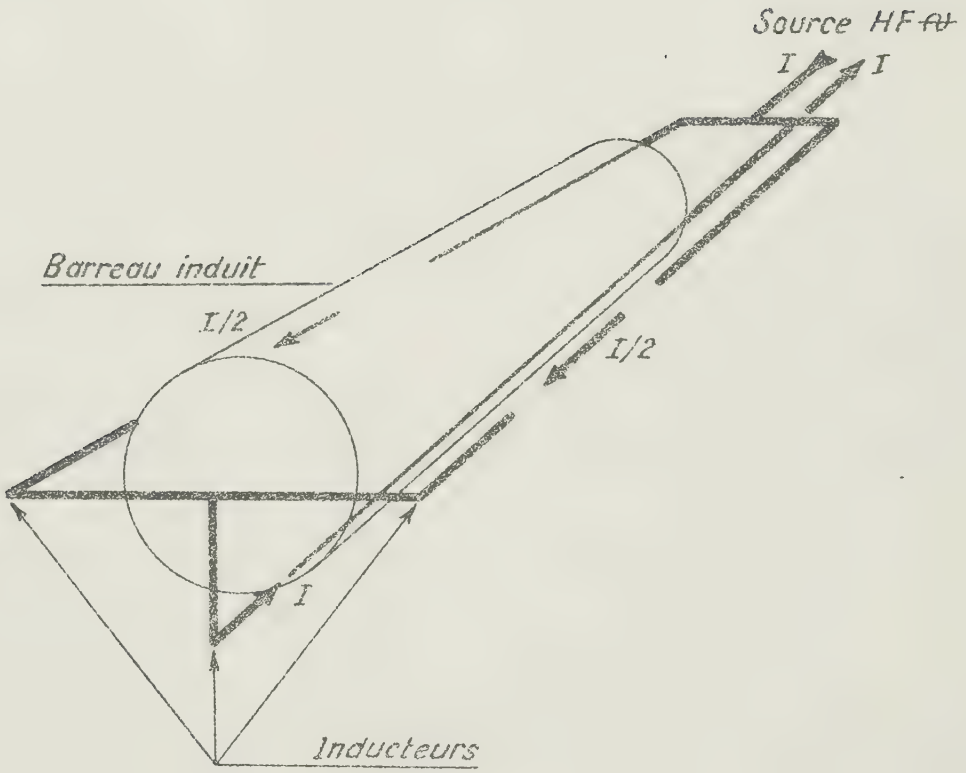


Fig. N°4bis

dispositifs en régime sinusoïdal par les interactions entre harmoniques d'ordres différents.

CHAMPS MAGNETIQUES CROISES

La meilleure façon de créer deux distributions d'induction magnétique se compensant parfaitement du point de vue des lignes de force du liquide, consiste à rendre les lignes équipotentielles de chaque distribution orthogonales à celles de l'autre.

De telles distributions sont décrites par les paires de fonctions conjuguées d'une fonction analytique de variable complexe $z = x + jy$

La fonction $f(z) = k \log \frac{z - a}{z + a}$ exemple parmi de nombreux possibles

peut convenir. Nous l'avons retenue parce que l'une des deux distributions est simplement et rigoureusement créée par une paire de courants filiformes, rectilignes, parallèles, donc facile à reproduire expérimentalement avec une grande précision permettant la vérification des prévisions théoriques.

La seconde distribution exige un inducteur beaucoup plus élaboré, et hors de portée des moyens dont disposait notre laboratoire. Nous l'avons recréée approximativement à l'aide de trois courant filiformes afin de montrer qualitativement l'efficacité de notre dispositif inducteur à champs croisés, vis-à-vis de la tenue des masses liquides (voir figure n° 4/6).

REMARQUE : Toutes les fonctions d'une variable complexe $z = x + jy$ dont nous désignerons les paires de fonctions conjuguées par $u(x,y)$ et $v(x,y)$, satisfaisant simultanément aux critères :

$$\text{grad}_u B_v^2 > 0$$

$$\text{grad}_v B_u^2 > 0$$

pouvant donner lieu à un système inducteur adéquat à la sustentation des liquides conducteurs.

CHAPITRE 2

ETUDE MATHEMATIQUE

PLAN DE L'ETUDE

Nous vérifierons dans quelle mesure notre modèle satisfait le critère d'équilibre statique du liquide.

Ensuite dans l'hypothèse du comportement pseudo-diamagnétique parfait $\delta \ll r$, nous montrerons comment un cylindre circulaire droit peut être sollicité par des courants filiformes, parallèles à son axe, en fonction de leurs positions.

Nous considérerons deux courants : +I et -I.

Dans ce cas de figure, nous établirons les formules des forces résultantes de lévitation par les propriétés d'images des courants inducteurs.

Enfin, nous généraliserons en éliminant l'hypothèse du pseudo-diamagnétisme parfait, c'est-à-dire en admettant que la profondeur de pénétration δ, des courants, est du même ordre de grandeur que le rayon du cylindre induit, ce qui nous conduira à donner des expressions des forces de lévitation en fonction de la fréquence et de la conductivité du barreau mais surtout à calculer les expressions des puissances actives dissipées dans les barreaux cylindriques circulaires rigoureusement valables à l'état solide tout au moins.

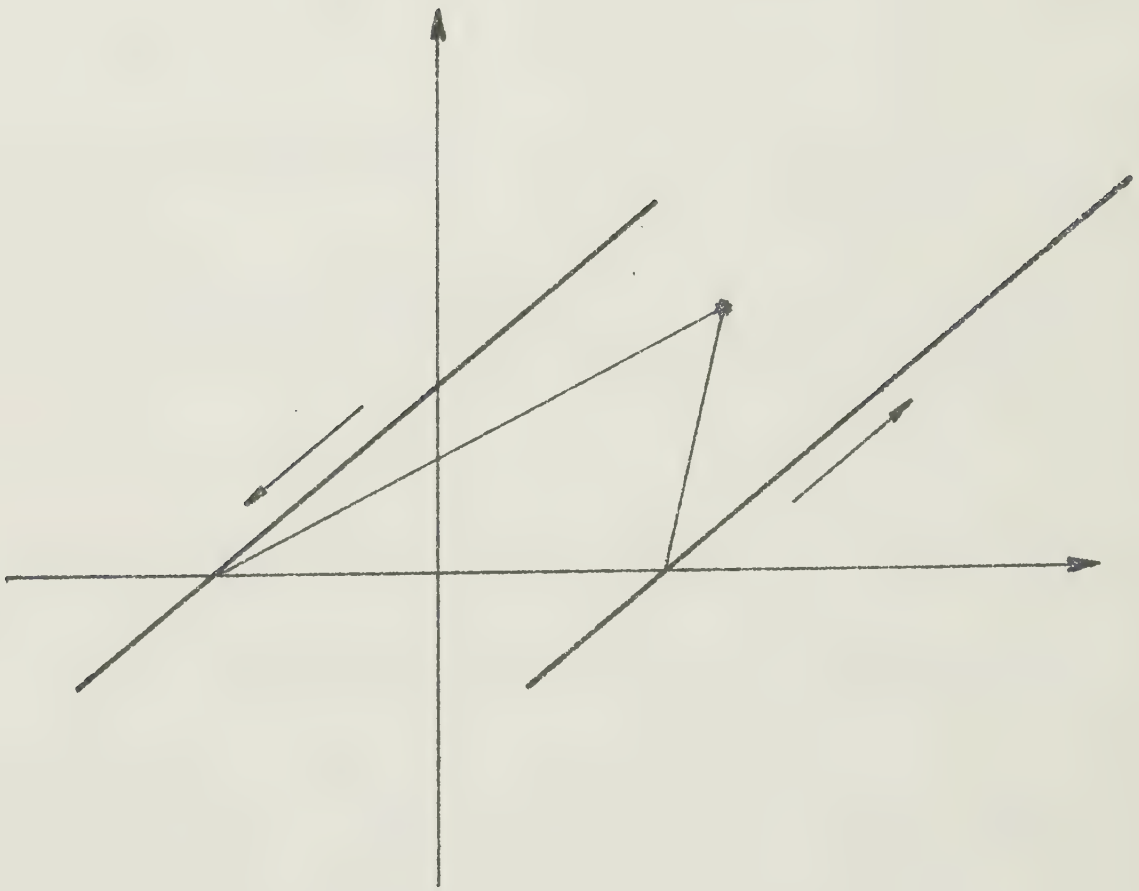


FIGURE N° 11

EQUIPOTENTIELS — EQUIGRADIENTS

POTENTIEL VECTEUR A

Considérons le système inducteur à 2 courants linéaires rectilignes, parallèles schématisé sur la figure n° 11 ci-contre.

C'est un résultat connu (rappelé dans l'annexe 3) que, dans le vide, le potentiel vecteur de l'induction magnétique, créé par ces courants est donné par :

$$A = \frac{\mu_o I}{2\pi} \; Log \; \frac{R_2}{R_1}$$

R plus courte distance entre le courant considéré et le point M où règne le potentiel A.

Soit pour les tracés des équipotentielles A = cte, en l'absence de matière induite, la fonction : (voir annexe n° 5)

$$y^2 + (x - a \coth A)^2 - \frac{a^2}{Sh^2 A} = 0$$

qui représente des familles de cercles de rayons : r = a/ ShA
dont les centres, situés sur l'axe x, ont pour abscisse

$$x_c = a. \coth A \text{ (voir figure n° 12)}$$

En présence d'un barreau circulaire, très bon conducteur, la distribution des équipotentielles est modifiée et les tracés se déduisent des propriétés des "courants images" mises en évidence dans l'annexe n° 4.

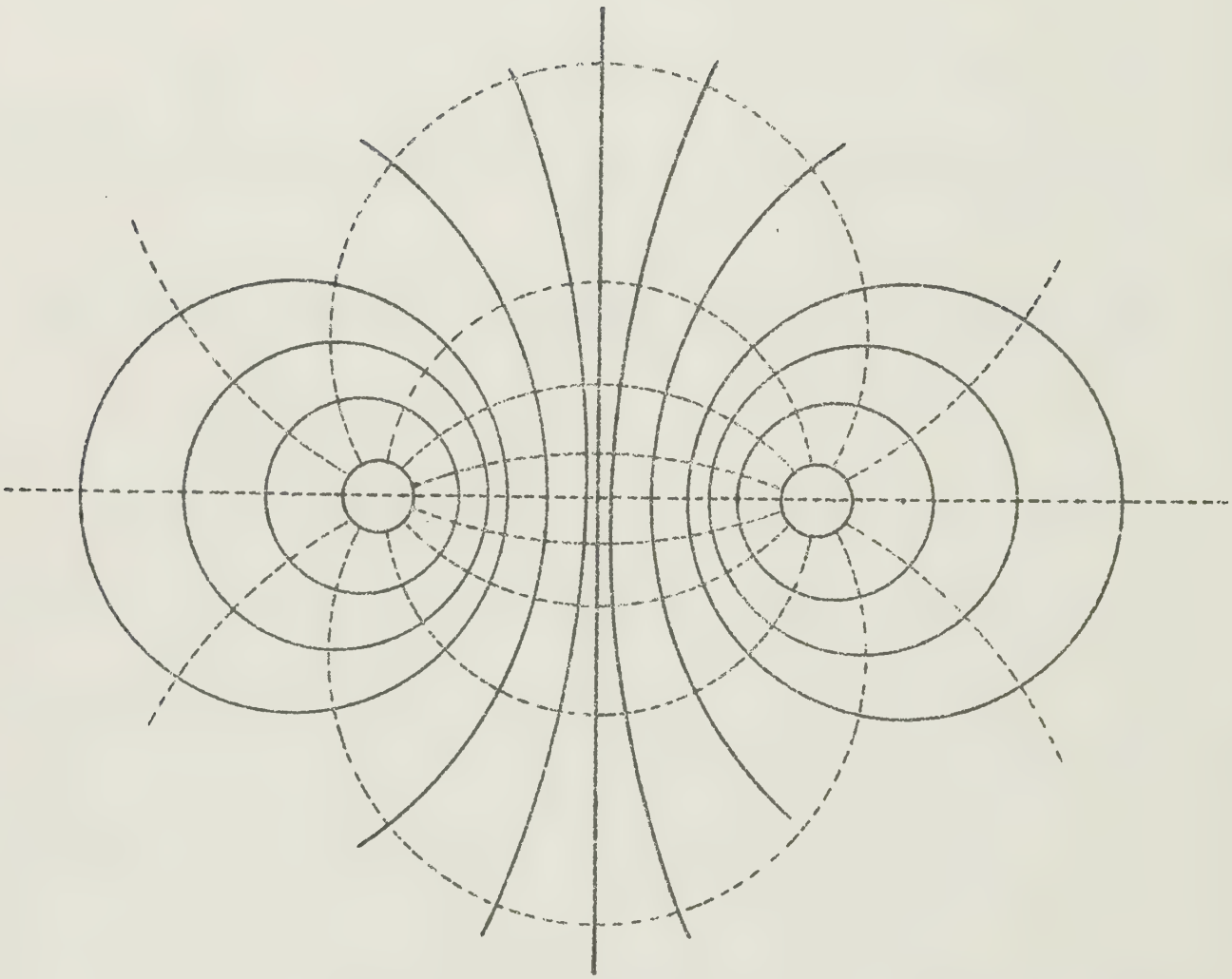


FIGURE N 12

GRADIENT DE B^2

Etant donné les propriétés physiques du système inducteur proposé, le système de COORDONNEES BI-AXIALES *semble judicieux.*

Le système est défini comme suit :

$$x + j\,y = a.\ th\left(\frac{u + jv}{2}\right)$$

$$u + j\,v = Log\left(\frac{a + x + jy}{a - x - jy}\right)$$

$$u = \frac{1}{2}\ Log\left[\frac{(a + x)^2 + y^2}{(a - x)^2 + y^2}\right]$$

$$v = Arctg\ \frac{y}{x + a} + Arctg\ \frac{y}{a - x}$$

Les composantes du gradient s'écrivant

$$\begin{cases} grad_u\ B^2 = \dfrac{1}{a}\ (\ Ch\,u + Cos\ v\ ).\ \dfrac{\partial B^2}{\partial u} \\ \\ grad_v\ B^2 = \dfrac{1}{a}\ (Ch\ u + cos\ v\ ).\ \dfrac{\partial B^2}{\partial v} \end{cases}$$

mais $\vec{B} = \vec{Rot}_u\ \vec{A}$

Dans ce système de coordonnées le $\vec{Rot}$ *s'écrit :*

$$B = Rot_v\ A = -\frac{1}{a}\ (Ch\ u + cos\ v)\ .\ \frac{\partial A}{\partial u}$$

Comme $A = \frac{\mu_o I}{2\pi} \cdot u$, il vient

$$B^2 = \frac{\mu_o^2 I^2}{4\pi^2 a^2} (Ch u + \cos v)^2$$

Du point de vut de la stabilité du liquide seule la composante $grad_u B^2$ nous intéresse ; il vient, calcule faits :

$$grad_u B^2 = \frac{\mu_o^2 I^2}{2\pi^2 a^3} (Ch u + \cos v)^2 \cdot Sh\, u.$$

Transposé dans le système cartésien en x, y cela donne, en utilisant

$$\cos v = \pm\, 1/\sqrt{1 + tg^2 v} \quad \text{et} \quad tg\,(v_1 + v_2)$$

$$grad_u B^2 = \frac{\mu_o^2 I^2}{2\pi^2 a^3} \left| \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{(a+x)^2 + y^2}{(a-x)^2 + y^2}} + \sqrt{\frac{(a-x)^2 + y^2}{(a+x)^2 + y^2}} \right) \pm \frac{a^2 - x^2 - y^2}{\sqrt{(a^2 - x^2 - y^2) + 4a^2 y^2}} \right.$$

$$\left. \cdot \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{(a+x)^2 + y^2}{(a-x)^2 + y^2}} - \sqrt{\frac{(a-x)^2 + y^2}{(a+x)^2 + y^2}} \right) \right.$$

$Grad_u \, B_\nu^2$

$\theta = 45°$

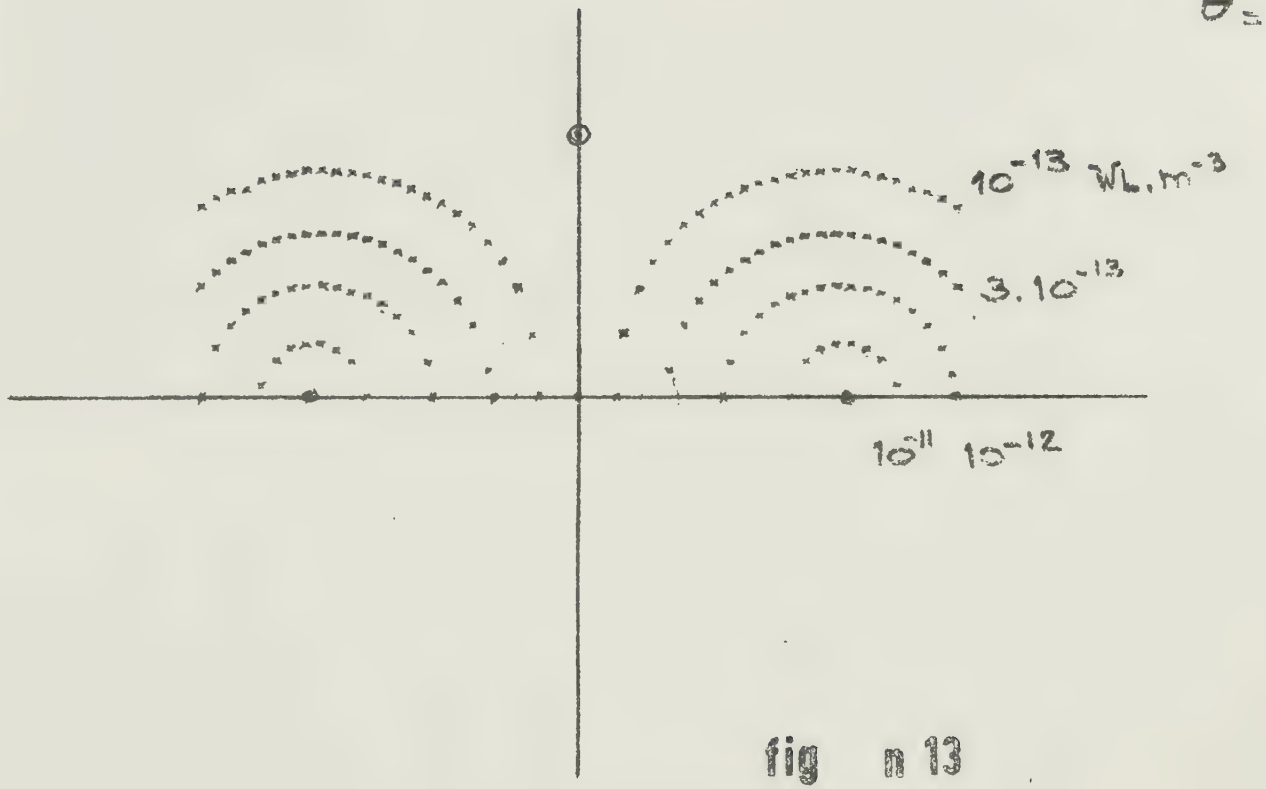


fig n 13

Nota : les lignes définissant les directions du $\text{grad}_u B^2$ *sont données par les courbes* v = cte *qui sont elles-mêmes des cercles de rayon* $= a/\sin v$ *centrés sur l'axe des y, et dont les centres ont pour ordonnées* $y_c = -a \cot g\, v$

La figure n° 13 donne un exemple de distribution des équigradients, définissant des zones de stabilité potentielle pour le liquide parfaitement conducteur, avec les directions des gradients.

On observera que le $\text{grad}_u B^2$ *est toujours positif et peut donc empêcher toute coulée du liquide conducteur dans la direction* u ($v = c^{te}$)

La distribution A', normale à la précédente, représentée par l'autre fonction conjuguée, v (x,y- soit :

$$A' = k \left(\text{Arctg} \frac{y}{a+x} + \text{Arctg} \frac{y}{a-x} \right)$$

montre un gradient de $(B')^2$ *selon v d'expression :*

$$\text{grad}_v (B')^2 = \frac{1}{a} (ch\, u + \cos v) \frac{\partial (B')^2}{\partial v}$$

$$= \frac{k^2}{a^3} (ch\, u + \cos v)^2 . Sh\, u$$

positif dans un demi plan de section droite des inducteurs, qui par conséquent peut empêcher toute coulée dans la direction v (u = cte)

C'est ce que nous avons approximativement réalisé en superposant l'inducteur montré sur la figure n° 4bis, à l'inducteur bifilaire, pour obtenir l'inducteur composé schématisé figure n° 4.

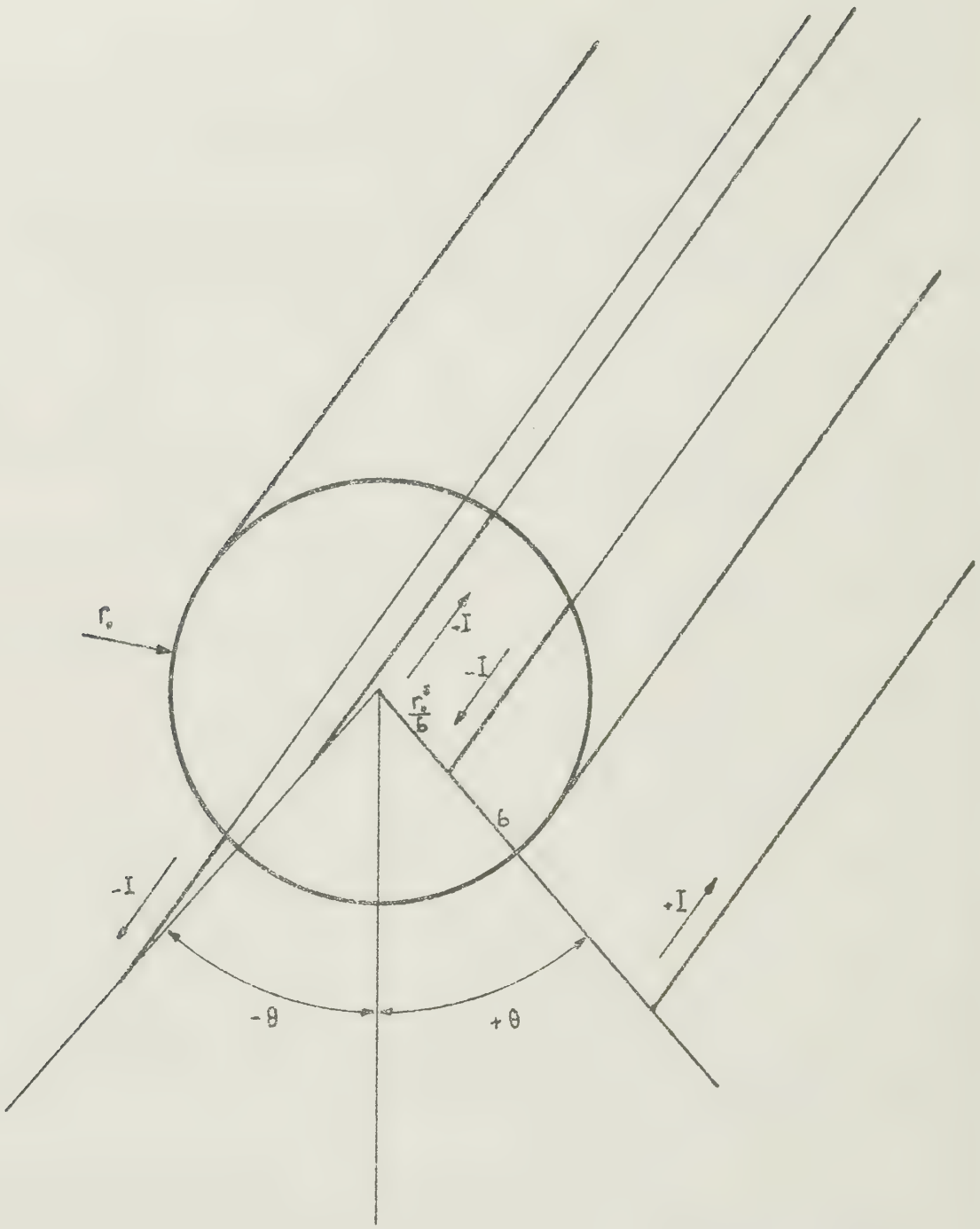


FIGURE N° 14

FORCE RESULTANTE SUR UN CYLINDRE

On cherche la force résultante des actions électromagnétiques des deux courants rectilignes, parallèles, filiformes, sur un cylindre bon conducteur en haute fréquence (figure n° 14).

Les développements contenus dans les annexes n° 3 et 4 établissent que :

TOUT SE PASSE DU POINT DE VUE CHAMP ET POTENTIEL COMME SI LE CYLINDRE ETAIT REMPLACE PAR DEUX "COURANTS IMAGES" D'INTENSITE $\pm$ I, CALES A L'ANGLE $\pm$ Θ SUR LE RAYON $b'' = r_o^2 / b$

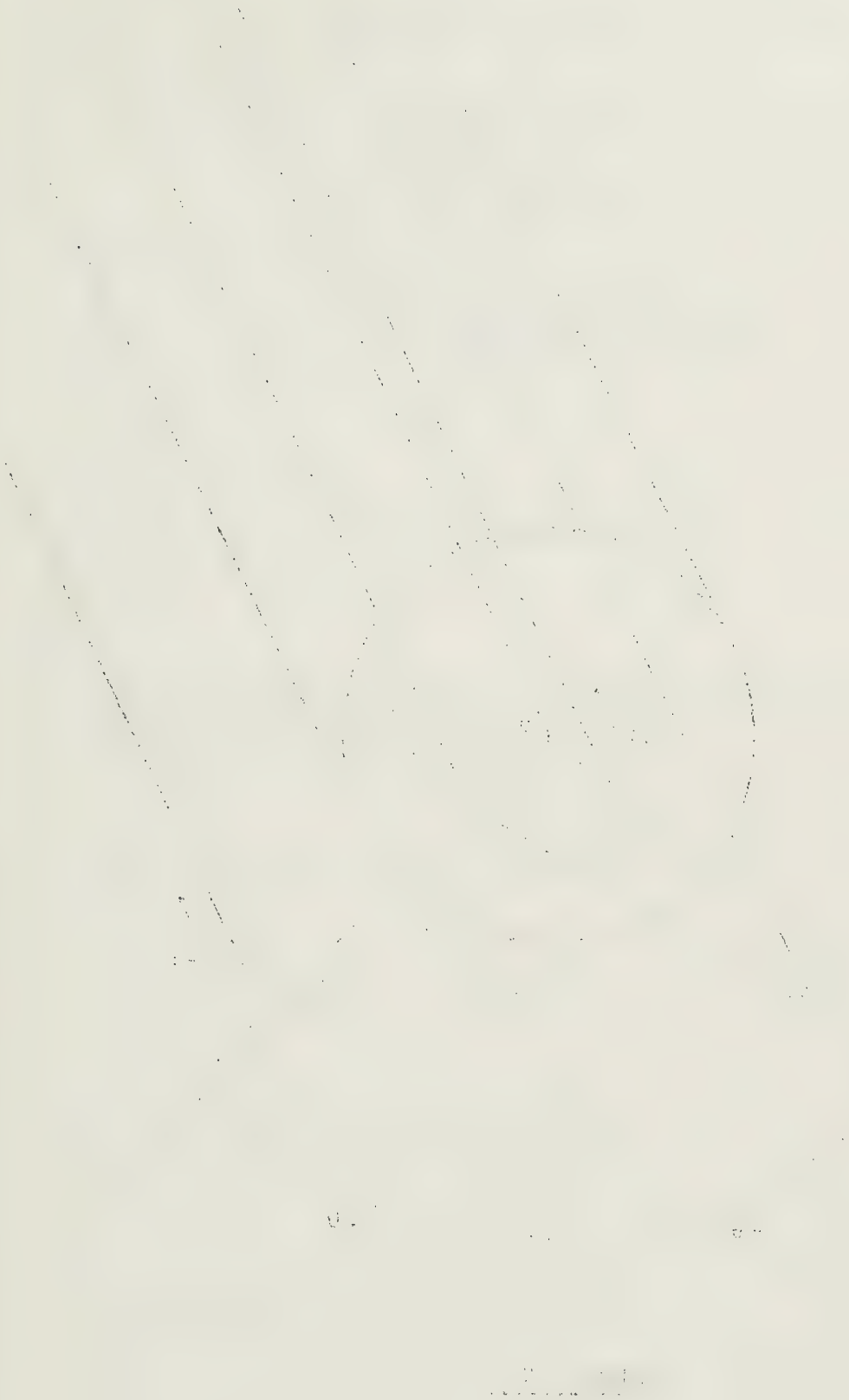
On peut écrire d'après la figure n° 15, en appliquant les forces de LAPLACE

$$F = \Sigma \; (- \vec{I} \wedge \vec{B}) \cos \Theta$$

D'après la loi de BIOT et SAVART :

$$B_1 = \frac{\mu_o I}{2\pi\left(b - \frac{r_o^2}{b}\right)} \quad , \quad B_2 = \frac{\mu_o I}{2\pi\sqrt{b^2 + \frac{r_o^4}{b^2} - 2r_o^2 \cos 2\Theta}}$$

d'où l'expression de la force, en posant $\alpha = b/r_o$



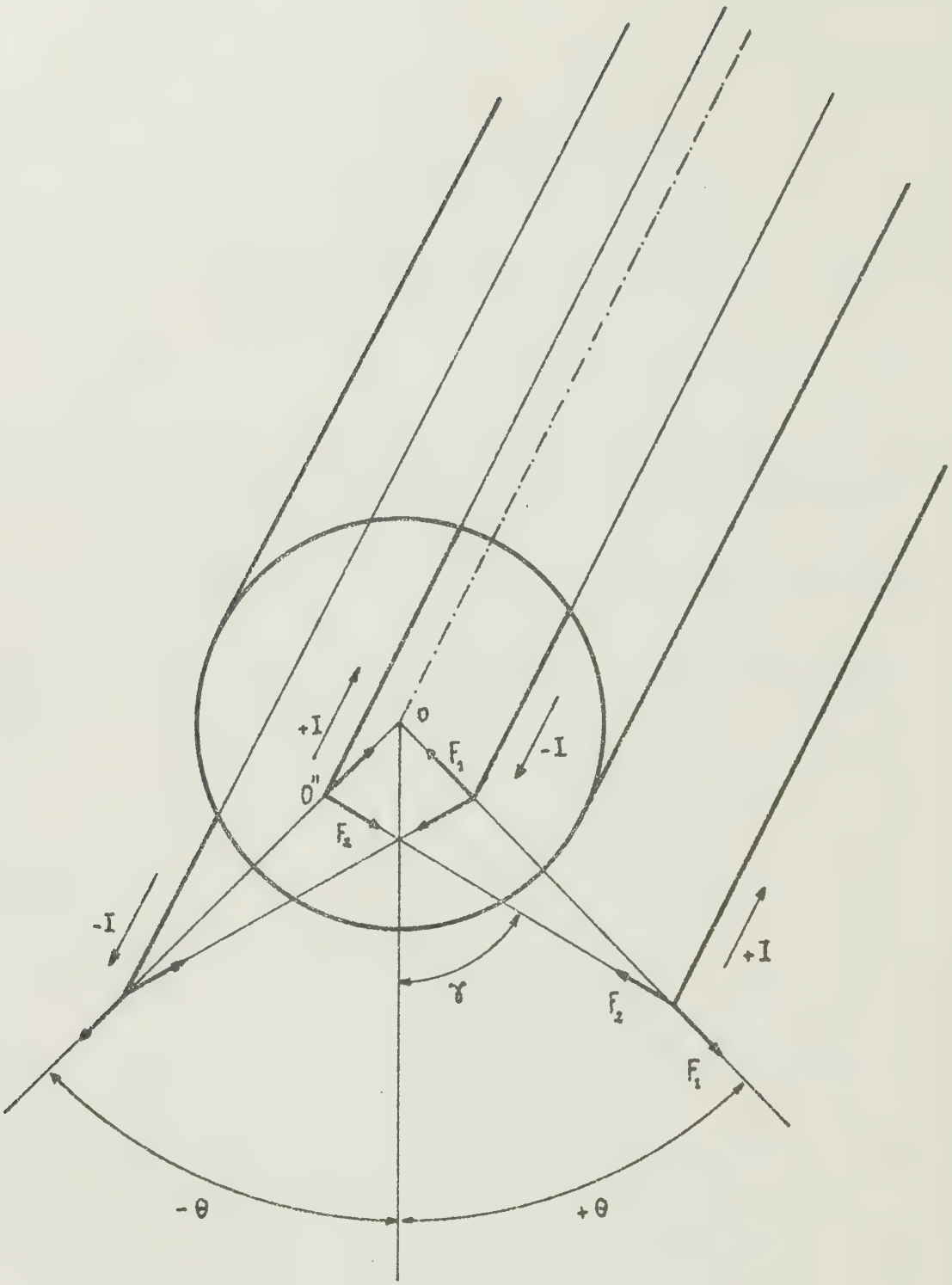


FIGURE N° 15

$$F = \frac{a\,\mu_o\,I^2}{\pi \cdot r_o}\left(\frac{\cos\gamma}{\sqrt{a^4 + 1 - 2a^2\cos 2\theta}} - \frac{\cos\theta}{a^2 - 1}\right)$$

avec $\gamma = \theta + \text{Arcsin}\left(\frac{\sin 2\theta}{\sqrt{a^4 + 1 - 2a^2\cos 2\theta}}\right)$

$\left(\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}\right.$, appliqués à $\overset{\frown}{OO'O''}$ (fig.15)

Cette dernière formule n'est valable que pour une position fixe du cylindre. Il est utile de la généraliser en considérant les translation du cylindre perpendiculairement à son axe.

En considérant le cas de la figure n° 16, on peut écrire

$\theta' = \theta - \beta_1$

$\theta'' = \theta + \beta_2$

$b'_1 = \sqrt{R^2 + b^2 - 2bR\cos(\phi - \theta)}$

$b'_2 = \sqrt{R^2 + b^2 - 2bR\cos(\phi + \theta)}$

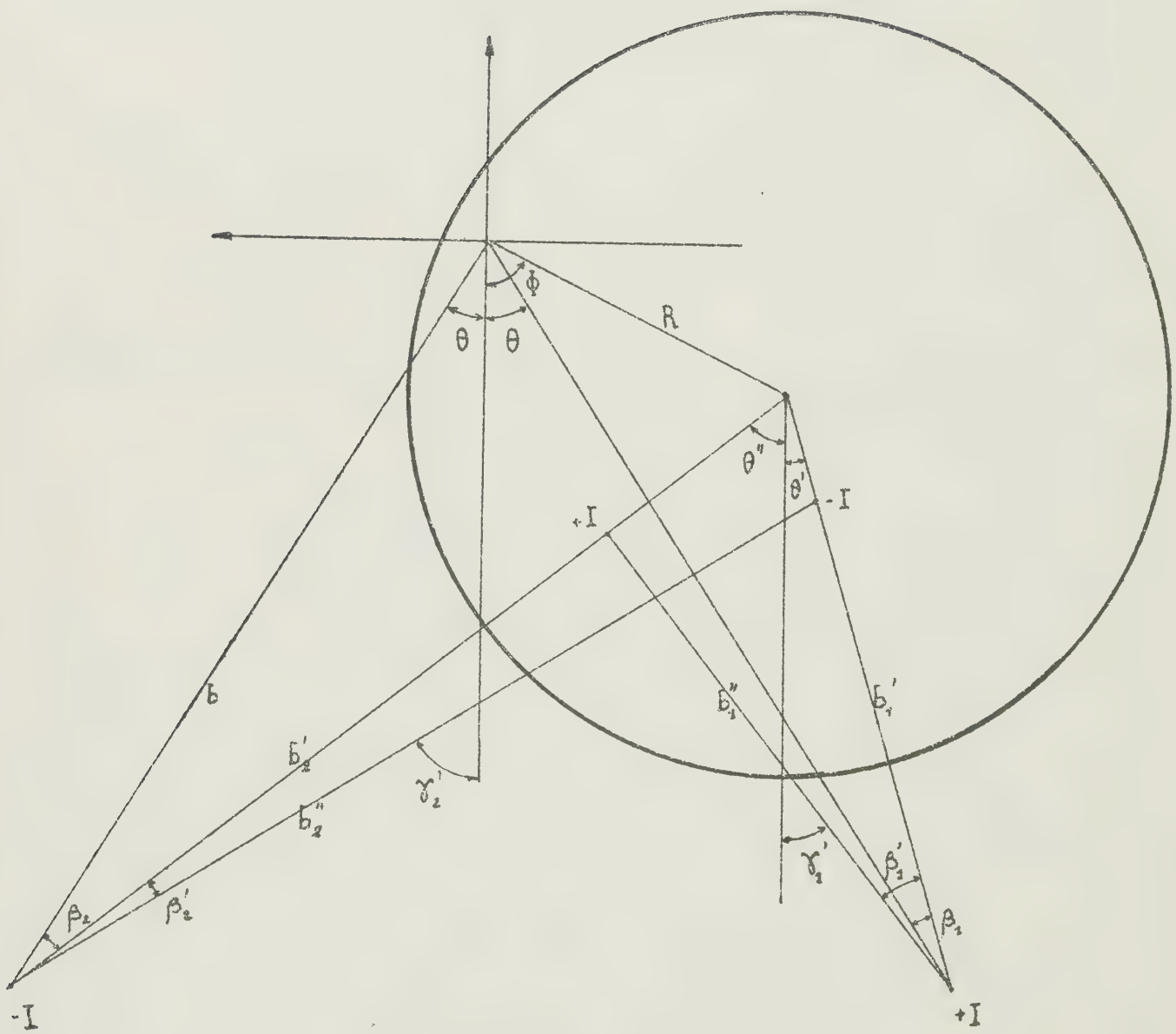


FIGURE N° 16

$$\beta_1 = \text{Arcsin} \frac{R \sin (\phi - \theta)}{b'_1}$$

$$\beta_2 = \text{Arcsin} \frac{R \sin (\phi + \theta)}{b'_2}$$

$$\gamma'_1 = \theta' + \beta'_1 = \theta' + \text{Arcsin} \frac{r_o^2 \sin (\theta' + \theta'')}{b'_2 \cdot b''_1}$$

$$b''_1 = \sqrt{\left(\frac{r_o^2}{b'_2} \right)^2 + b'^2_1 - 2 b'_1 \frac{r_o^2}{b'_2} \cos (\theta' + \theta'')}$$

$$\gamma'_2 = \theta'' + \beta'_2 = \theta'' + \text{Arcsin} \frac{r_o^2 \sin (\theta' + \theta'')}{b'_1 \cdot b''_2}$$

$$b''_2 = \sqrt{\left(\frac{r_o^2}{b'_1} \right)^2 + (b'_2)^2 - 2 b'_2 \frac{r_o^2}{b'_1} \cos (\theta' + \theta'')}$$

On obtient par le même procédé que dans le cas de la formule précédente, une formule donnant la force résultante verticale

$$F_V = \frac{\mu_o I^2}{2\pi} \left[\frac{\cos \theta'}{b'_1 - \frac{r_o^2}{b'_1}} - \frac{\cos \gamma'_1}{b''_1} + \frac{\cos \theta''}{b'_2 - \frac{r_o^2}{b'_2}} - \frac{\cos \gamma'_2}{b''_2} \right]$$

ON OBTIENDRAIT AUSSI UNE EXPRESSION DES FORCES HORIZONTALES, DONC DES FORCES DE STABILISATION LATERALE, EN SUBSTITUANT LES SINUS AUX COSINUS DANS LA DERNIERE FORMULE.

$$F_H = \frac{\mu_o I^2}{2\pi} \left[\frac{\sin \theta'}{b'_1 - \frac{r_o^2}{b'_1}} - \frac{\sin \gamma'_1}{b''_1} - \frac{\sin \theta''}{b'_2 - \frac{r_o^2}{b'_2}} + \frac{\sin \gamma'_2}{b''_2} \right]$$

On observera que, du point de vue statique, c'est-à-dire le barreau immobile, le COUPLE RESULTANT *des actions électromagnétiques* EST NUL.

Pour le vérifier, il suffira de vérifier l'identité suivante, facile à établir d'après la figure n° 16.

$$\Gamma = \frac{\mu_o I^2}{2\pi} \left(\frac{b'_2}{b''_2} \cdot \sin \beta'_2 - \frac{b'_1}{b''_1} \cdot \sin \beta'_1 \right) \equiv 0$$

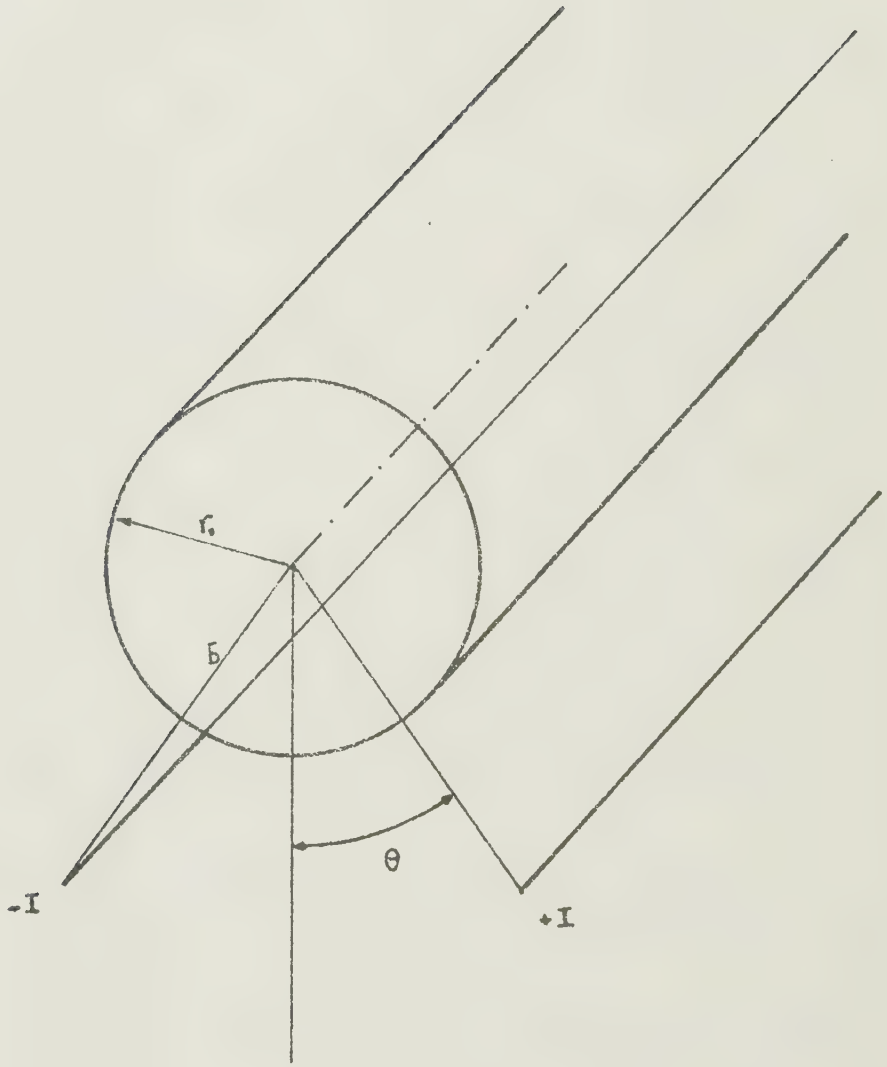


FIGURE N° 17

CONDUCTIVITE ET FREQUENCE QUELCONQUES

Cela revient à abandonner l'hypothèse du comportement pseudo-diamagnétique parfait du barreau induit.

En d'autres termes nous ne considérons plus que la profondeur de pénétration des courants de FOUCAULT est négligeable devant la dimension du rayon du cylindre.

Soit un barreau cylindrique circulaire, disposé parallèlement à un inducteur constitué par deux courants filiformes, rectilignes conformément à la figure n° 17.

Comme il a été dit précédemment, la longueur du dispositif est supposée assez grande, devant les dimensions transversales, pour être en mesure de négliger les effets d'extrêmités. L'étude se ramène à un problème à deux dimensions dans le plan de section droite.

Nous nous proposons de calculer :

1°) les forces développées entre barreau et inducteurs
2°) la puissance dissipée dans le barreau.

Ceci quelle que soit la position du barreau par rapport à l'inducteur.

Dans ce but, nous allons considérer chaque courant inducteur séparément, et ensuite combiner leurs effets (figure n° 18

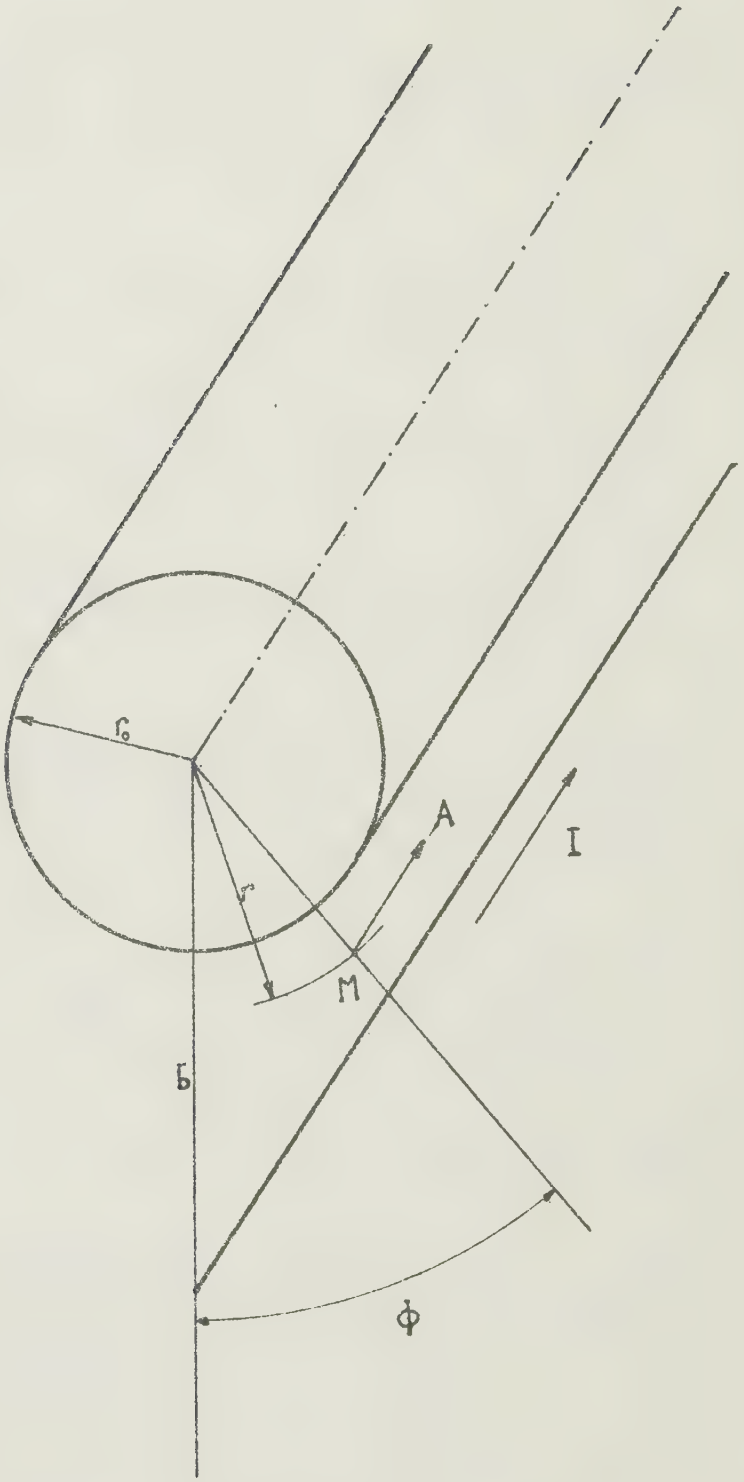


FIGURE N° 18

C'est par l'étude de la distribution du potentiel vecteur $\vec{A}$ que nous aborderons le problème puisque, comme cela a déjà été dit plus haut, il s'agit d'une fonction de point pseudo-scalaire, de laquelle on peut déduire simplement les distributions d'induction, de densité de courant donc de forces, et de puissance dissipée.

Le potentiel vecteur doit satisfaire les équations suivantes déjà indiquées dans le paragraphe "équations de base"

$$\left\{ \begin{array}{lll} \Delta A_i = \mu_0 g \dfrac{\partial A_i}{\partial t} & & \text{Dans la matière du barreau} \\ \Delta A_e = 0 & & \text{Dans l'espace extérieur du barreau} \end{array} \right.$$

La forme du dispositif suggère d'écrire les équations dans le système de coordonnées cylindriques

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 A_i}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial A_i}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 A_i}{\partial \phi^2} = \mu_0 g \dfrac{\partial A_i}{\partial t} \\ \dfrac{\partial^2 A_e}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial A_e}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 A_e}{\partial \phi^2} = 0 \end{array} \right.$$

Le plan des calculs à exécuter se résume ainsi :

a) Recherche d'une solution particulière des deux équations ci-dessus
b) évaluations des différentes constantes par les conditions à la limite.
   Pour cela :
   b1 - décomposition du potentiel vecteur d'après ses origines physiques
   b2 - rappel de l'expression du potentiel vecteur créé par un courant rectiligne isolé.

RESOLUTION DES EQUATIONS

PREMIERE EQUATION

Par la méthode de séparation des variables cherchons des solutions de la forme :

$$A_i (r, \phi, t) = R_i (r) \cdot G_i (\phi) \cdot exp. (j\omega t)$$

On a établi en annexe N° 6 la :

Détermination de la fonction R_i (r), soit :

$$R_i = C_n \cdot J_n (j^{3/2} \cdot r \cdot \sqrt{\mu_o g \omega})$$

C_n est une constante convenable à déterminer

J_n représente une fonction de BESSEL complexe de première espèce et d'ordre "n"

En d'autre termes, en faisant intervenir l'important paramètre δ , PROFONDEUR DE PENETRATION *des courants de FOUCAULT, ou encore* EPAISSEUR DE PEAU

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_o g \omega}} = 1.261,6 \sqrt{\frac{\rho}{\omega}} = 503,29 \sqrt{\frac{\rho}{f}}$$

En unités MKSA (ρ et f représentent respectivement la résistivité du barreau et f la fréquence des courants) . Il vient pour la fonction R_i

$$R_i = C_n \cdot J_n \left(j^{3/2} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{r}{\delta} \right)$$

Dans la même annexe N° 6, on détermine :

La fonction $G_i (\phi)$

$$G_i = K_n \cdot \cos n\phi$$

DEUXIEME EQUATION

Par une méthode semblable à la précédente, exposée cette fois dans l'annexe n° 7, on détermine les fonctions :

$$R_e = C'_n \, r^n + C''_n \, r^{-n}$$

$$G_e = K'_n \cos n \phi$$

RECAPITULATION

En généralisant les résultats acquis dans les annexes n° 6 et 7, on admettra les solutions suivantes, pour les équations de base ; en supposant que A_i *et* A_e REPRESENTENT LES VALEURS EFFICACES DES POTENTIELS.

$$A_i = \sum_{n=1}^{\infty} K_n \cdot C_n \cdot J_n \left(j^{3/2} \sqrt{2} \cdot \frac{r}{\delta} \right) \cos n\phi$$

valable dans la matière du barreau, c'est-à-dire pour $0 \leq r \leq r_0$

$$A_e = \sum_{n=1}^{\infty} K'_n \left(C'_n r^n + C''_n r^{-n} \right) . \cos n\phi$$

valable hors du barreau, c'est-à-dire pour $r \geq r_0$

DISCUSSION DU POTENTIEL VECTEUR.-

On peut discerner deux causes expliquant la distribution du potentiel vecteur :

1°) Le courant filiforme inducteur I
2°) Les courants induits dans le barreau

Il est donc possible d'exprimer le potentiel vecteur sous la forme

$$\begin{cases} A_i = A_i' + A_i'' \\ A_e = A_e' + A_e'' \end{cases}$$

où A_i' *est le potentiel vecteur créé par le* COURANT INDUCTEUR SEUL A L'INTERIEUR DU BARREAU.

A_i'' *le potentiel vecteur créé par les* COURANTS INDUITS SEULS A L'INTERIEUR DU BARREAU.

A_e' *le potentiel vecteur créé par le* COURANT INDUCTEUR SEUL HORS DU BARREAU

A_e'' *le potentiel vecteur créé par les* COURANTS INDUITS SEULS HORS DU BARREAU

Pour des raisons de continuité évidentes, A_i' *et* A_e' *ne peuvent être l'objet que d'une seule et unique fonction, que nous appellerons A', puisque* $\mu = \mu_o$ *dans tout l'espace.*

A' est la fonction de distribution du potentiel vecteur dû au courant rectiligne filiforme indéfini de valeur efficace I, disposé parallèlement selon la figure n° 18.

RAPPEL DE L'EXPRESSION DE A.-

Par une démarche analogue à celle utilisée dans l'annexe n° 3, on peut établir la formule donnant A', dans le cas d'un courant rectiligne unique I

$$A' = \frac{\mu_o I}{2\pi} \cdot \mathrm{Log}_e\ r$$

$$A' = \frac{\mu_o I}{2\pi} \left(- \mathrm{Log}_e\ b + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{r^n}{b^n} \cos n\phi \right)$$

b étant la distance de l'origine des coordonnées au courant inducteur I (figure N° 18.

CONDITIONS A LA LIMITE.-

Les constantes K et C sont déterminées par les conditions physiques du dispositif elles doivent obligatoirement être des fonctions de r_o , b, I , ω , g (ou δ)

A la surface du barreau, la valeur de l'induction magnétique déduite soit de la formule A_i soit de la formule A_e doit être unique puisque par hypothèse pratique nous admettons que le barreau n'est pas ou n'est plus ferromagnétique. En effet, la composante normale est toujours continue et la composante tangentielle n'est discontinue que pour des densités SUPERFICIELLES *de courant non nulles, ce qui n'est pas notre cas, donc : (*)*

$$\vec{B} = \mathrm{rot}\ \vec{A}_i = \mathrm{rot}\ \vec{A}_e \quad \text{pour } r = r_o$$

) *une densité superficielle non nulle conduit à admettre une densité volumique infinie près de la surface.*

On observera, étant donné la symétrie du système, que le vecteur induction magnétique, est contenu dans le plan de section droite (plan de coupe de la figure n° 18).

On peut donc le décomposer en deux parties, l'une suivant ϕ soit B_ϕ , l'autre suivant r, soit B_r.

ON aura

$$\vec{B}_r = rot_r \vec{A}_i = rot_r \vec{A}_e = \frac{1}{r} \frac{\vec{dA}_i}{d\phi} = \frac{1}{r} \frac{\vec{dA}_e}{d\phi}$$

$$\vec{B}_\phi = rot_\phi \vec{A}_i = rot_\phi \vec{A}_e = - \frac{\vec{dA}_i}{dr} = - \frac{\vec{dA}_e}{dr}$$

La condition B_r continue produit

$$C_n . K_n . J_n \left(j^{3/2} \sqrt{2} \frac{r_o}{\delta} \right) = K'_n C''_n . r_o^{-n} + K'_n C'_n r_o^n$$

La condition B_ϕ continue produit :

$$C_n K_n . \frac{d}{dr} (J_n) = - K'_n C''_n . n . r_o^{-(n+1)} + K'_n C'_n . n . r_o^{n-1}$$

On obtient trois inconnues : $(C_n K_n)$, $(K'_n C''_n)$; $(K'_n C'_n)$ etseulement deux équations. Le système est indéterminé. Pour lever celle-ci on s'appuiera sur la remarque suivante :

Le respect du principe de conservation de l'électricité conduit à poser que :

$$\int_s i \, ds = o$$

avec i densité du courant induit dans le barreau
s section droite du barreau.

Par conséquent, si l'on s'éloigne du barreau, c'est-à-dire si r croît, le potentiel vecteur imputable aux courants induits, doit décroître.

Puisque A_e doit être de la forme

$$A_e = K'_n C'_n r^n \cos n\phi + K'_n C''_n r^{-n} \cos n\phi$$

et à la fois de la forme

$$A_e = A' + A''_e$$

Nous sommes conduits à admettre l'identification de A' avec le premier terme de A_e dans l'avant dernière expression de A_e

Comme d'autre part A' a pour expression

$$A' = \frac{\mu_o I}{2\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{r^n}{b^n} \cos n - \text{Log } b \right)$$

(pour r < b)

L'analogie des formes mathématiques et le sens physique suggèrent d'écrire :

$$K'_n C'_n = \frac{\mu_o I}{2\pi} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{b^n}$$

Posons maintenant :

$$C_n K_n = h_n \qquad \text{et } K'_n C'_n = h'_n$$

Les expressions de h_n et h'_n sont calculées dans l'annexe N° 8

$$\frac{\partial}{\partial x}$$

EXPRESSIONS FINALES DES POTENTIELS A_i ET A_e :-

En remplaçant les constantes h_n et h'_n par leur valeur dans les solutions complètes des équations de base, on obtient les expressions suivantes :

Potentiel vecteur intérieur au barreau :

$$A_i = \frac{\mu_o I}{\pi}\left[-\frac{1}{2} Log\, b + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_o^n}{b^n} \cdot (N_n - jP_n) \cdot \left[Ber_n\left(\frac{r}{\delta}\sqrt{2}\right) + j\, Bei_n\left(\frac{r}{\delta}\sqrt{2}\right)\right] \cdot \cos n\phi\right]$$

$$A_i = \frac{\mu_o I}{\pi}\left[-\frac{1}{2} Log b + \sum_{n=1}^{\infty} W_n \cos n\phi + j\, X_n \cos n\phi\right]$$

avec

$$W_n = \frac{r_o^n}{b^n}\left[N_n\, Ber_n\left(\frac{r}{\delta}\sqrt{2}\right) + P_n\, Bei_n\left(\frac{r}{\delta}\sqrt{2}\right)\right]$$

et

$$X_n = \frac{r_o^n}{b^n}\left[N_n\, Bei_n\left(\frac{r}{\delta}\sqrt{2}\right) - P_n\, Ber_n\left(\frac{r}{\delta}\sqrt{2}\right)\right]$$

Potentiel vecteur extérieur au barreau

$$A_e = \frac{\mu_o I}{2\pi} \left[- Log b + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n b^n} \cos n\phi + \frac{r_o^{2n}}{n b^n} \left[- 1 + 2n \left(Q_n + j S_n \right) \right] r^{-n} \cos n\phi \right]$$

$$A_e = \frac{o I}{2} \left[- Log b + \sum_{n=1}^{\infty} V_n \cos n\phi + j Z_n \cos n\phi \right]$$

avec

$$V_n = \frac{1}{n b^n} \left[+ r^n - r_o^{2n} \left(1 - 2n Q_n \right) r^{-n} \right]$$

et

$$Z_n = \frac{2 r_o^{2n}}{b^n} \cdot S_n \cdot r^{-n}$$

Les expressions de N_n, P_n, Q_n, S_n sont données dans l'annexe n° 8

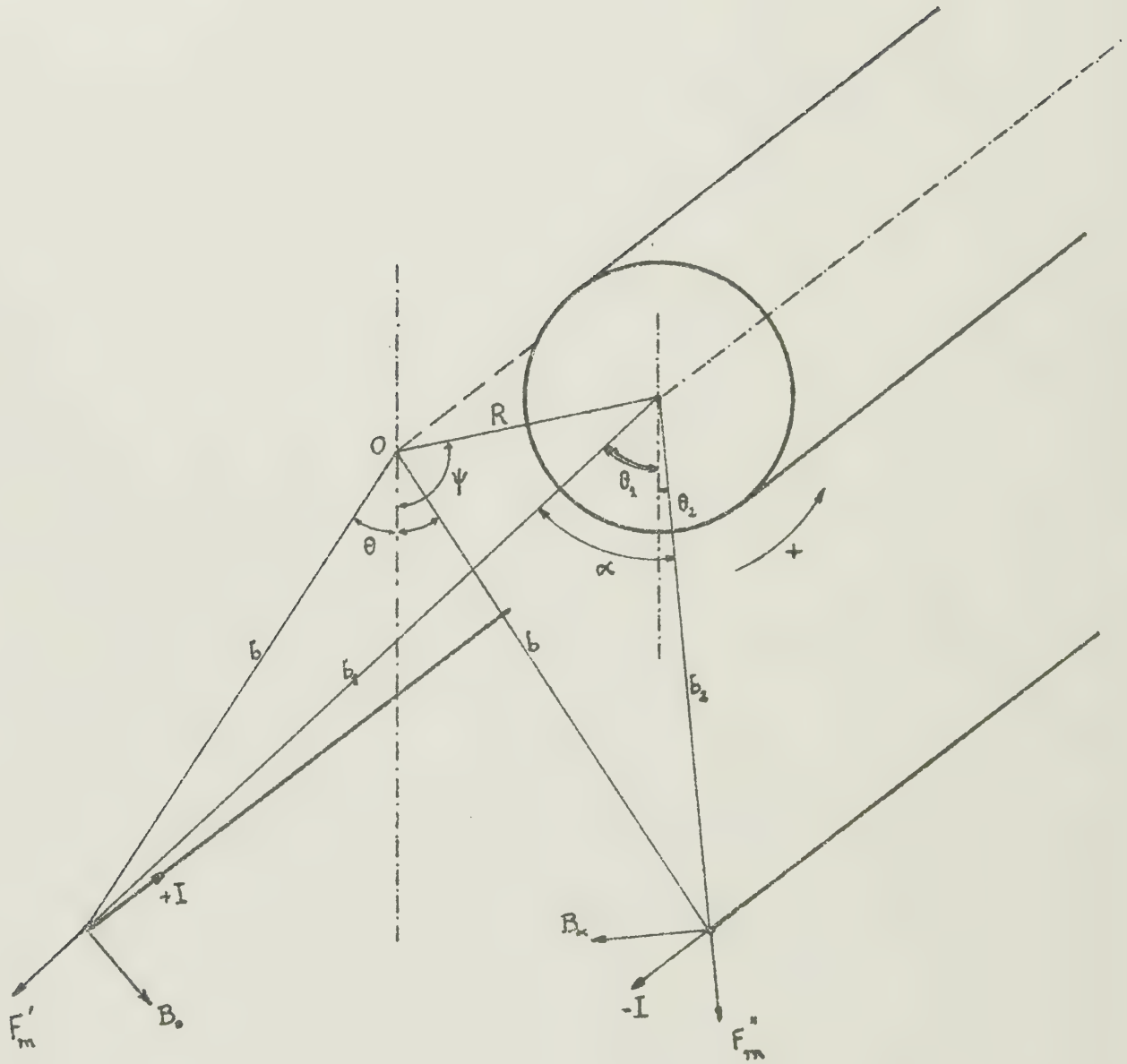


FIGURE N 19

FORCES DANS LE CAS GENERAL

Cas de la figure n° 19

Nous sommes maintenant en mesure de calculer les forces s'exerçant entre les conducteurs rectilignes et le barreau, qui peuvent être utilisées pour "léviter" celui-ci.

Si nous connaissions la valeur de l'induction magnétique B, créée par les courants induits, à l'emplacement du courant I, nous pourrions faire usage de la relation générale

$$\vec{F} = \vec{I} \wedge \vec{B}$$

$\vec{F}$ représente la force exercée par le barreau sur l'unité de longueur du conducteur considéré.

Par application du principe d'égalité de l'action et de la réaction, $\vec{F}$ représente aussi la valeur absolue de la force de lévitation cherchée exercée sur le barreau par le conducteur considéré pour l'unité de longueur.

D'après la symétrie du dispositif, la dernière expression peut s'écrire :

$$F = I \cdot B$$

Reprenons les notations I et B désignant les valeurs efficaces des grandeurs sinusoïdales.

On sait que :

F_m = part. re. $(\overline{I}.\overline{B}.)$

avec :

F_m *force moyenne exercée entre un conducteur filiforme et le barreau*

$\overline{B}$ *expression complexe de B*

$\overline{I}$ *expression complexe de I*

Il nous faut maintenant expliciter B

INDUCTION MAGNETIQUE AU POINT : $r = b_1$, $\phi = 0$

Comme $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$

Dans notre cas particulier, étant donné les propriétés de symétrie du système :

$$B_o = - \frac{\partial A''_e}{\partial r} \quad \text{pour} \quad \phi = 0$$

mais

$$A''_e = A_e - A'$$

$$A''_e = \frac{\mu_o I}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_o^{2n}}{n b_1^n} \left[- 1 + 2n\, Q_n + j\, 2n\, S_n \right] r^{-n} \cos n\phi$$

donc

$$B_o = \frac{-\mu_o I}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} n r_o^{2n} \left(\frac{1}{2n} - Q_n - j S_n \right) b_1^{-2\,(n+\frac{1}{2})}$$

INDUCTION MAGNETIQUE AUX POINTS : $r = b_2$, $\phi = \alpha$

Dans ce cas ,

$$\vec{B}_{\alpha} = \vec{B}_{\alpha r} + \vec{B}_{\alpha\phi}$$

avec

$$\vec{B}_{\alpha r} = rot_{\alpha r}\ \vec{A}''_e = \frac{1}{r}\ \frac{\partial \vec{A}''_e}{\partial \phi}$$

et

$$\vec{B}_{\alpha\phi} = rot_{\alpha\phi}\ \vec{A}''_e = -\ \frac{\partial A''_e}{\partial r}$$

On établit aisément :

$$B_{\alpha r} = \frac{\mu_o I}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} r_o^{2n} \cdot n \left(\frac{1}{2n} - Q_n - jS_n \right) b_2^{-(n+\frac{1}{2})} \cdot b_1^{-n} \sin n\alpha$$

et

$$B_{\alpha\phi} = -\ \frac{\mu_o I}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} r_o^{2n} \cdot n \left(\frac{1}{2n} - Q_n - jS_n \right) b_2^{-(n+1)} \cdot b_1^{-n} \cos n\alpha$$

EXPRESSIONS DE b_1 , b_2 , α

Avant de passer aux formules des forces de lévitation elles-mêmes, il convient de donner les relations liant b_1, b_2, α *et* b, θ , R , ψ

De l'examen de la figure n° 19 il ressort qu'on peut écrire

$$b_1 = \sqrt{b^2 + R^2 - 2\,b\,R\cos(\theta + \psi)}$$

$$b_2 = \sqrt{b^2 + R^2 - 2\,b\,R\cos(\psi - \theta)}$$

$$\alpha = 2\theta - \text{Arc sin}\left[\frac{R\sin(\psi - \theta)}{b_2}\right] + \text{Arc sin}\left[\frac{R\sin(\psi + \theta)}{b_1}\right]$$

ou encore

$$= 2\,\theta + \text{Arc sin}\left[\frac{R.\sin(\psi + \theta)}{b_1}\sqrt{1 - \frac{R^2\sin^2(\psi - \theta)}{b_2^2}} - \frac{R\sin(\psi - \theta)}{b_2}\sqrt{1 - \frac{R^2\sin^2(\psi + \theta)}{b_1^2}}\right]$$

EXPRESSIONS DES FORCES RESULTANTES DE LEVITATION

Les expressions données ici sont relatives au cas de la figure n° 19 ; c'est-à-dire les forces totales de lévitation, pour une position quelconque du barreau dans l'espace, mais sous réserve qu'il demeure parallèle aux deux courants inducteurs, + I et - I

$F_{m(v)}$ *représente la force moyenne dirigée selon la verticale*

$F_{m(h)}$ *la force moyenne dirigée selon l'horizontale*

$$F_{m(v)} = \frac{\mu_o I^2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} n r_o^{2n} \left(\frac{1}{2n} - Q_n\right) \left[b_1^{-n} . b_1^{-(n+1)} . \cos(\theta_2 + n\alpha) + b_1^{-(n+1)} . b_2^{-n} . \cos(\theta_1 + n\alpha) - b_1^{-2(n+\frac{1}{2})} \cos\theta_1 - b_2^{-2(n+\frac{1}{2})} \cos\theta_2 \right]$$

$$F_{m(h)} = \frac{\mu_o I^2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} n . r_o^{2n} \left(\frac{1}{2n} - Q_n\right) \left[b_1^{-(n+1)} . b_2^{-n} . \sin(\theta_1 + n\alpha) - b_1^{-n} . b_2^{-(n+1)} \sin(\theta_2 + n\alpha) - b_1^{-2(n+\frac{1}{2})} \sin\theta_1 + b_2^{-2(n+\frac{1}{2})} \sin\theta_2 \right]$$

L'établissement des formules ci-dessus bien que fastidieux ne présente aucune difficulté.

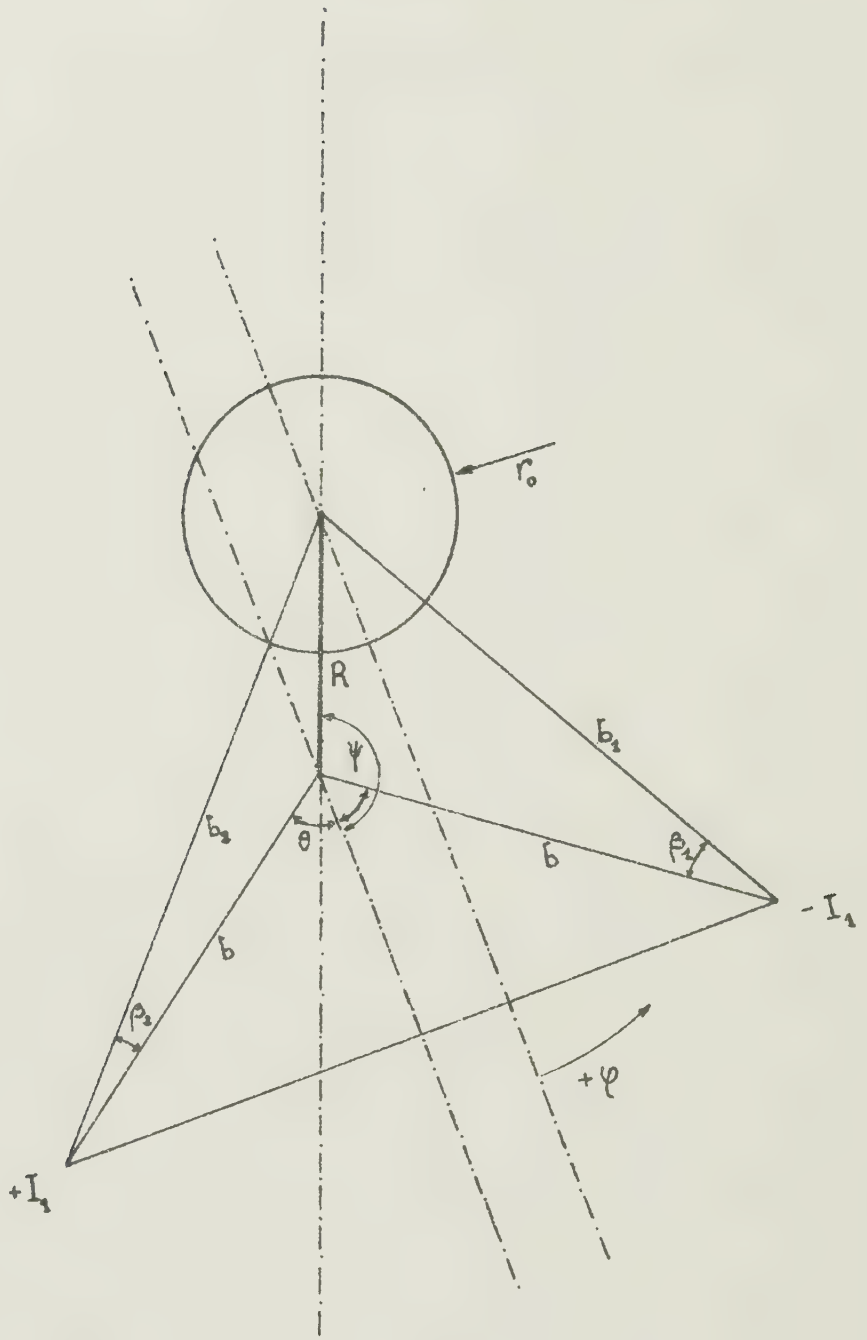


FIGURE N° 20

PUISSANCE DISSIPEE

Cas de la figure n° 20

On sait que :

$$W = \frac{1}{\mu_o} \oint \vec{E} \wedge \vec{B} \cdot \vec{n} \; . \; dl \quad \textit{(formule de POYNTING)}$$

dans notre cas, en appelant W la puissance dissipée par unité de longueur de cylindre on peut écrire :

$$W = \frac{r_o}{\mu_o} \int_0^{2\pi} \frac{\partial A}{\partial t} \cdot \frac{\partial A}{\partial r} \cdot d\phi$$

puisque $E = - \frac{\partial A}{\partial t}$ *et* $B_\phi = - \frac{\partial A}{\partial r}$

d'autre part $A = (A_1 + A_2)$, *soit en définitive* *

$$W = \frac{r_o}{\mu_o} \int^{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} (A_1 + A_2) \cdot \frac{\partial}{\partial r} \cdot (A_1 + A_2) \cdot d\phi$$

On trouvera dans l'annexe n° 9 les étapes d'établissement de l'intégrale numérique suivante ; en ne retenant que la partie réelle du produit E B

* A_1 et A_2 *sont les potentiels vecteurs correspondant respectivement aux courants inducteurs* + I_1 *et* - I_1

$$W = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \cdot \frac{r_o}{\delta} \cdot \mu_o \cdot I_1^2 f_1 \left[-\int_0^{2\pi} \left[\Sigma F_n' \left[\frac{\cos n(\phi - \theta + \beta_1)}{b_1^n} - \frac{\cos n(\phi + \theta + \beta_2)}{b_2^n} \right] \right] \right.$$

$$\cdot \left[\Sigma R_n \left[- \frac{\cos n(\phi + \theta + \beta_2)}{b_2^n} + \frac{\cos n(\phi - \theta + \beta_1)}{b_1^n} \right] \right] \cdot d\phi$$

$$+ \int_0^{2\pi} \left[\Sigma F_n \left[\frac{\cos n(\phi - \theta + \beta_1)}{b_1^n} - \frac{\cos n(\phi + \theta + \beta_2)}{b_2^n} \right] \right] \cdot \left[\Sigma R_n' \right.$$

$$\left. \left. \left[- \frac{\cos n(\phi + \theta + \beta_2)}{b_2^n} + \frac{\cos n(\phi - \theta + \beta_1)}{b_1^n} \right] \right] \cdot d\phi \right]$$

F_n , F_n' , R_n , R_n' *étant des constantes définies dans l'annexe n° 9*

Mais les intégrales de la forme

$$\int_0^{2\pi} \cos n_1 x \cdot \cos n_2 x \, d_x = 0$$

sont identiquement nulles si $n_1 \neq n_2$

On peut donc écrire l'expression de la puissance sous la forme simplifiée équivalente

$$W = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \cdot \frac{r_o}{\delta} \mu_o I_1^2 f_1 \sum_{n=1}^{N} \int_0^2 \left(\frac{\cos n (\phi - \theta + \beta_1)}{b_1^n} - \frac{\cos n (\phi + \theta + \beta_2)}{b_2^n} \right)^2 \left(R'_n F_n - R_n F'_n \right) \cdot d\phi$$

REMARQUE

L'expression de la puissance donnée ci-dessus correspond au cas général où le barreau induit est excentré et déporté par rapport au plan de symétrie de l'inducteur.

Dans le cas où l'excentration conserve le barreau dans ce plan de symétrie l'expression se simplifie :

$$b_1 = b_2 , \qquad \beta_2 = - \beta_1 , \qquad \psi = \pi \text{ ou } 0$$

Il vient alors :

$$W = \frac{8\sqrt{2}}{\pi} \cdot \frac{r_o}{\delta} \cdot \mu_o I_1^2 f_1 \sum_{n=1}^{N} \int_0^2 \frac{\sin^2 n \phi \, \sin^2 n (\theta - \beta)}{b_1^{2n}} \cdot R'_n F_n - R_n F'_n \cdot d\phi$$

ou encore, l'intégrale étant égale à π

$$W = 8\sqrt{2} \cdot \frac{r_o}{\delta} \mu_o I_1^2 f_1 \sum_{n=1}^{N} \frac{R'_n F_n - R_n F'_n \cdot \sin^2 n (\theta - \beta)}{b_1^{2n}}$$

CHAPITRE 3

PROPRIETES DES MODELES

- Dans ce chapitre les applications numériques des formules de forces de lévitation et de puissances dissipées établies au chapitre précédent, sont traduites par des représentations graphiques.

- Il faut signaler que toutes les formules en question, étant donnée leurs formes, ont été traitées sur ordinateurs (en l'occurence IBM 7094 et 360).

  On comprendra qu'il était pratiquement impossible de se passer de tels moyens si l'on observe qu'il convenait de calculer des séries de fonctions de Bessel complexes jusqu'à l'ordre 20 ou 30.

- Les courbes tracées mettent en évidence certaines propriétés remarquables des dispositifs étudiés.

1.- pour de grandes profondeurs de pénétration, des courants induits dans le matériau lévité, "l'efficacité" de sustentation, par unité de longueur (nous la définissons par le nombre de "Newtons" par "ampères carrés" du courant inducteur) croît comme le carré de la fréquence, le carré de la conductivité et proportionnellement au diamètre du barreau.

2.- Pour de petites profondeurs de pénétration "l'efficacité" de sustentation devient sensiblement indépendante de la fréquence, de la résistivité du matériau traité, et du diamètre du barreau.

3.- La puissance dissipée, pour les grandes épaisseurs de peau, croît comme le carré de la fréquence, puis comme la racine carrée de celle-ci lorsque la profondeur de pénétration devient petite.

  C'est un résultat en parfait accord avec la théorie classique du chauffage par haute fréquence. Ce qui est remarquable ici c'est que le rapport force/puissance est constant vers les basses fréquences pour un barreau et une résistivité donnés.
  Cela signifie que chaque "newton" de sustentation est payé par un certain nombre minimal de "watts" irréductible. Ou encore sous un autre angle, pour des conditions déterminées de refroidissement du corps lévité, il existe une température minimale au-dessous de laquelle il est impossible de descendre si l'on veut maintenir le corps en état de lévitation. En conséquence, il peut en résulter que certains métaux ou alliages ne puissent pas être maintenus en régime permanent à l'état solide.

- Par contre ce rapport (F/ω) peut être altéré à volonté dans le sens d'une diminution, c'est-à-dire qu'il est possible en variant la fréquence d'inducteur,

de faire varier la puissance dissipée dans le matériau lévité et partant contrôler sa température.
Mais pour obtenir ce résultat, il est préférable d'opérer à fréquences fixes en agissant sur une simple commande de rapport d'intensité.
Nous abordons ce point de vue dans le chapitre 5.

Rendu à ce stade de l'étude on observera à l'aide des graphiques relatifs aux rapports forces/puissances en fonction de l'altitude du barreau lévité, que la température sera très mal maîtrisée par la simple variation de l'intensité du champ d'induction d'un inducteur donné. En effet, les rapports sont sensiblement indépendants de la position du barreau dans le système inducteur

4.- Il est aussi intéressant de noter que la puissance spécifique , soit la puissance dissipée par unité de volume ou de masse décroît comme les dimensions du barreau, ce qui est une conséquence du fait que le rapport F/w varie proportionnellement aux dimensions.

5.- De l'étude aux dimensions des différentes formules établies dans le chapitre précédent, on peut déduire les lois de similitudes données au paragraphe suivant :

LOIS DE SIMILITUDE

1.- FORCES ET PRESSIONS

- *Considérons une homothétie géométrique de rapport* κ *appliquée à un système en équilibre satisfaisant*

- *D'après les considérations, du point de vue thermodynamique, indiquées au paragraphe précédent, les forces sont proportionnelles à :*

$$P_o = \frac{\partial}{\partial n} \oint_V B^2 \, dV$$

- *l'homothétie* κ *entraine pour :*

a) les surfaces, $S = \kappa^2 S_o$

b) les poids, $P = \kappa^3 P_o$

c) l'induction magnétique, $B = \kappa^{-1} B_o$ *, d'où* $B^2 = \kappa^{-2} B_o^2$

(à force magnétomotrice constante)

- *Toutes choses égales par ailleurs, l'intégrale donnée ci-dessus commande de multiplier la force magnétomotrice par*

$$\kappa^{3/2}$$

pour rétablir l'équilibre de lévitation, dans la même forme géométrique, lingot de diamètre κ *fois plus grand*

Force magnétomotrice ; $M \times \kappa^{3/2}$

Les pressions métallostatiques sont multipliées par κ, *d'autre part les gradients de* B^2 *sont inchangés mais comme ils s'étendent sur les hauteurs* κ *fois supérieurs* LES EQUILIBRES DE PRESSIONS DEMEURENT INCHANGES.

2.- FREQUENCES DES CHAMPS INDUCTEURS

Pour que tout reste égal par ailleurs comme supposé au paragraphe précédent; il faut évidemment que les courants induits obéissent à l'homothétie géométrique donc il est nécessaire de multiplier "δ*" par* κ, *d'où il vient pour la fréquence*

$$f \propto \kappa^{-2}$$

3.- PUISSANCES DISSIPEES

On a vu que :

$$W = \oint_S \vec{E} \wedge \vec{B} \cdot \vec{n} \cdot dS$$

Dans l'homothétie définie plus haut :

$E \propto \kappa^{-1/2}$

$B \propto \kappa^{1/2}$

$S \propto \kappa^{2}$

donc

$$W \propto \kappa^{2}$$

Mais on observera que le volume du corps est κ^3 *fois plus grand, donc la* PUISSANCE SPECIFIQUE, *disons en Watts par mètre cube, ou en Watts par kilogramme pour un corps de masse volumique donnée,* DECROITRA COMME κ^{-1}

$$W_m \propto \kappa^{-1}$$

4.- TEMPERATURES

Toutes les conditions d'évacuation d'énergie thermique identique par ailleurs, puisque la surface d'échange et la puissance dissipée sont multipliées par κ^2 dans l'homothétie précédente, les températures demeureront inchangées

$$T^o = Cte$$

LA TEMPERATURE DE LA MASSE LIQUIDE SERA INDEPENDANTE DES DIMENSIONS

5.- RESISTIVITE ELECTRIQUE

Si la résistivité est changée, il suffira de restituer la distribution des courants de Foucault en altérant la fréquence de telle manière que le rapport :

$$\frac{\text{fréquence}}{\text{résistivité}} = Cte$$

pour rétablir l'équilibre dans sa forme initiale.

6.- INFLUENCE DE LA TENSION SUPERFICIELLE

On a vu que les pressions induites par la tension superficielle des liquides étaient de la forme

$$p \approx \frac{t}{r}$$

t tension superficielle
r rayon de courbure de la surface au point considéré.

p *évoluera comme* κ^{-1} *avec les dimensions, alors que la pression "métallostatique"* p_m *varie comme* κ *donc* p/p_m *varie comme* κ^{-2} *et devient vite négligeable pour des masses élevées.*

Pour que l'équilibre d'un lingot se conserve identique à lui-même il faut que :

$$\frac{t/\varpi}{\kappa^2} = Cte$$

avec ϖ *poids volumique*

7.- POIDS VOLUMIQUE

Si le poids volumique est modifié, sans autre changement, il suffit de varier l'induction magnétique, et donc la force magnétomotrice dans le rapport :

$$\frac{B_o}{B} = \frac{M_o}{M} = \frac{\varpi_o}{\varpi}$$

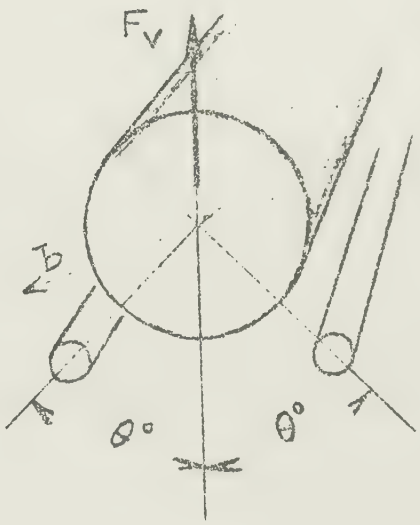
FORCES VERTICALES AXIALES

F_V

Ø barreau = 30 mm

D = 25 mm

Loi de similitude $F_V \propto 1/R$.



θ = 30°

θ = 45°

θ = 60°

θ = 75°

GRAPHIQUE N°

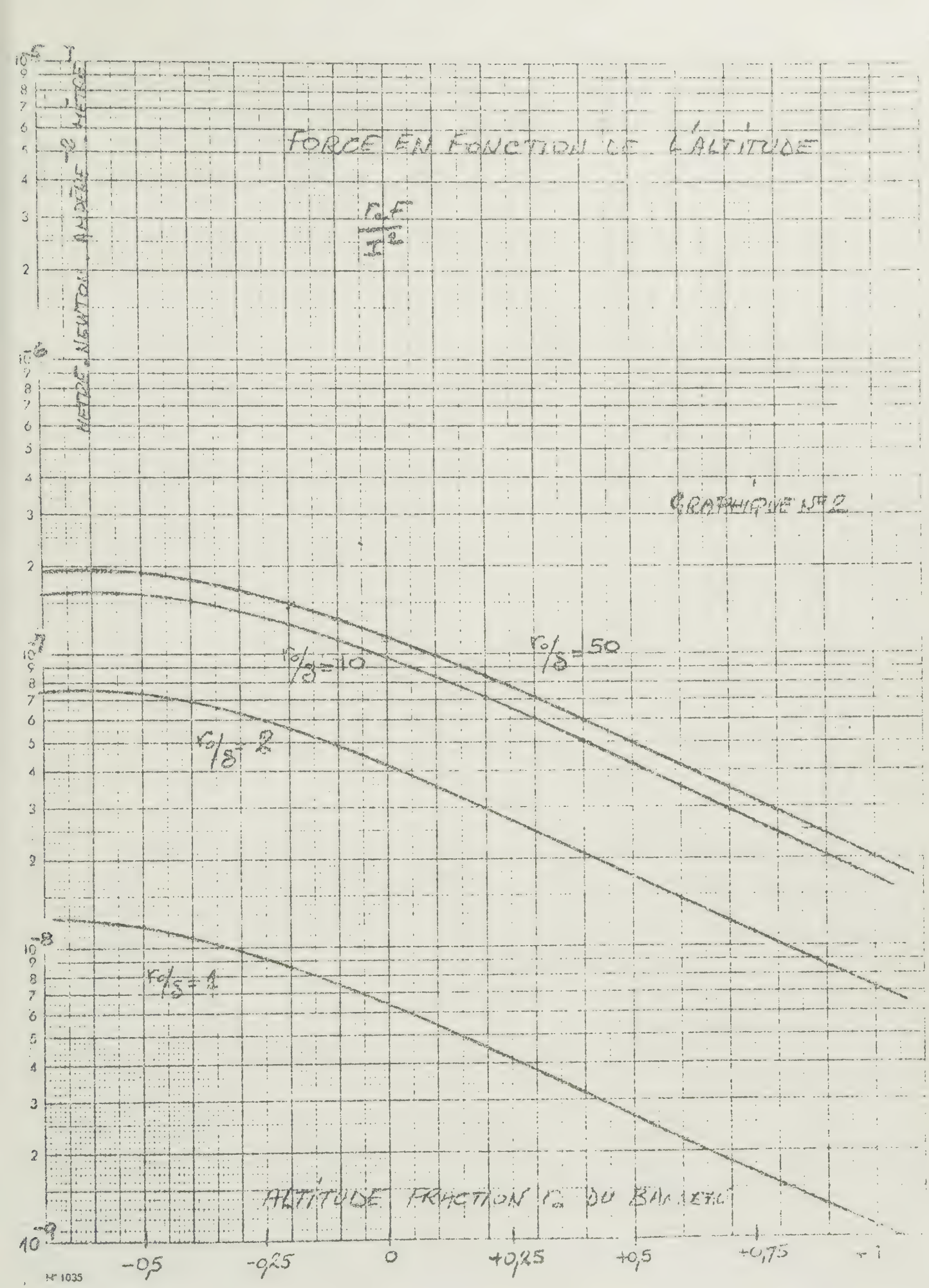
(Diamagnetisme
parfa

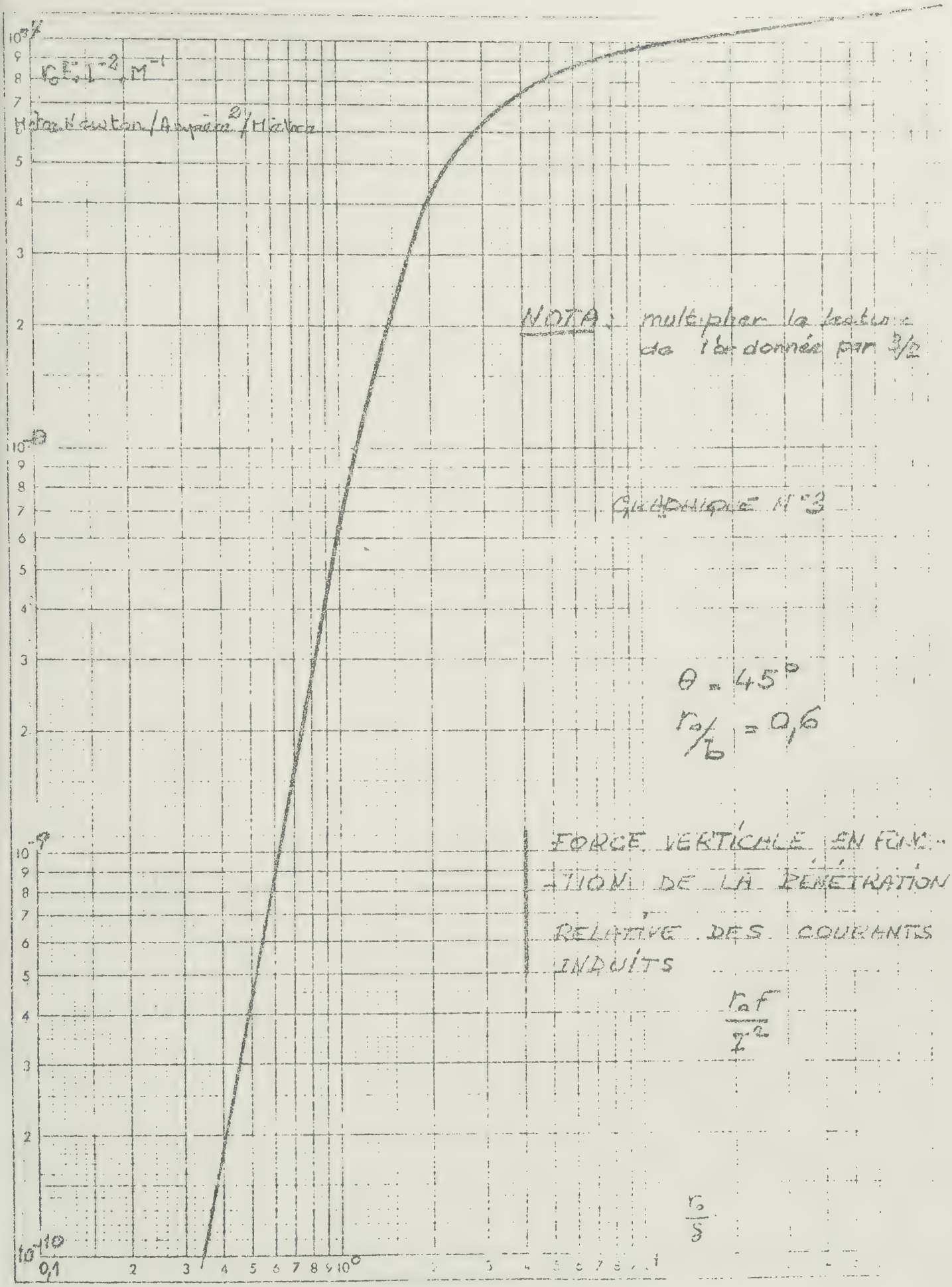
ALTITUDE EN FRACTION DE "r_0" DU BARREA

-0,5

0

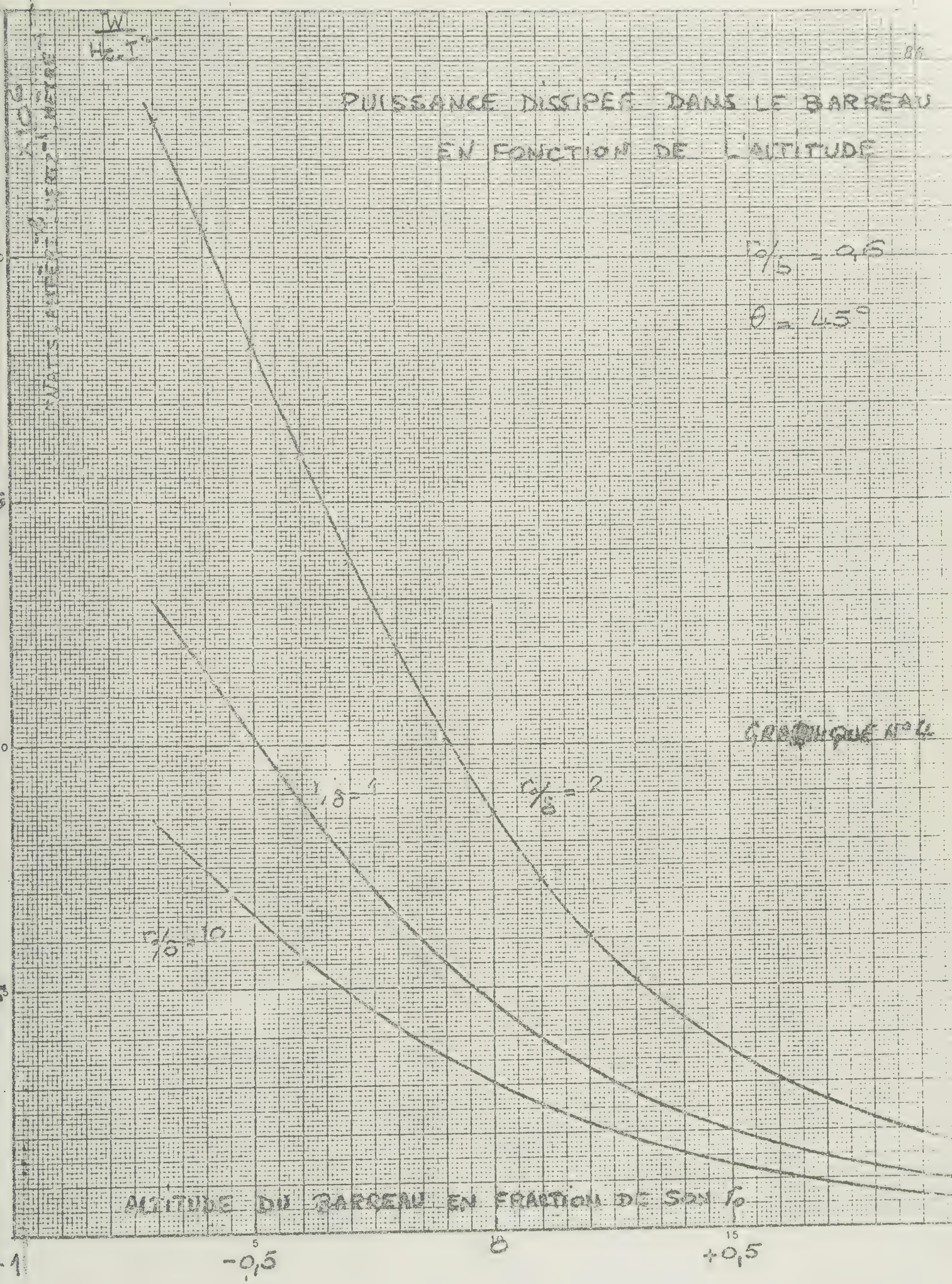
+0,5


FORCE EN FONCTION DE L'ALTITUDE
$\frac{r_0 F}{m v^2}$
NEWTON ANGLE METRE
GRAPHIQUE N° 2
$r_0/s = 50$
$r_0/s = 10$
$r_0/s = 2$
$r_0/s = 1$
ALTITUDE FRACTION DU RAYON
-0,5
-0,25
0
+0,25
+0,5
+0,75
+1
N° 1035

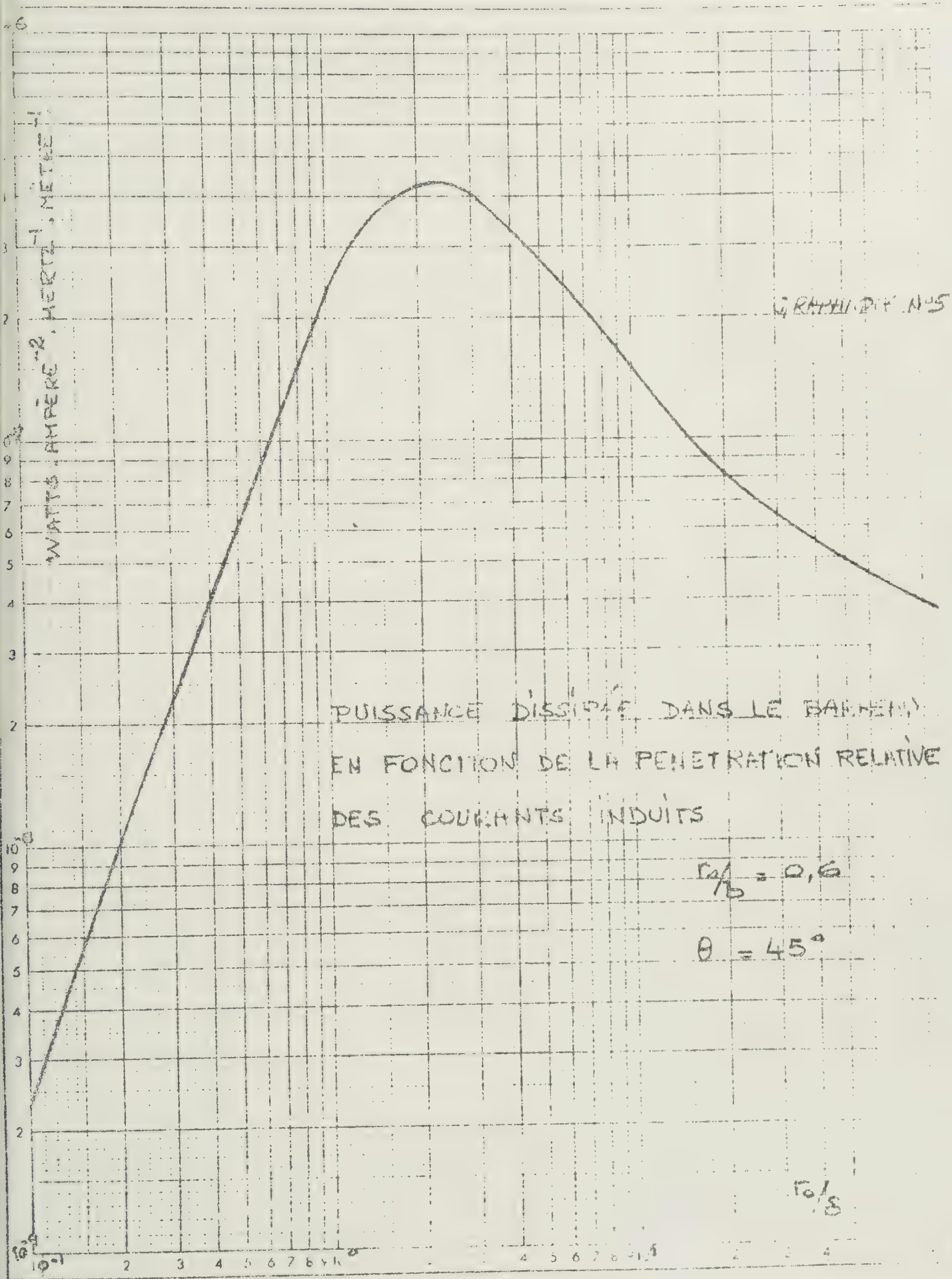

10^{-8}
$r_0 E_1^{-2} M^{-1}$
Hectar Newton/Ampère²/Mètre
10^{-9}
10^{-10}
0,1 2 3 4 5 6 7 8 9 10^0
NOTA : multiplier la lecture de l'abscisse par 3/2
GRAPHIQUE N° 3
θ = 45°
$r_0/b = 0,6$
FORCE VERTICALE EN FONCTION DE LA PÉNÉTRATION RELATIVE DES COURANTS INDUITS
$\frac{r_0 f}{I^2}$
$\frac{r_0}{s}$

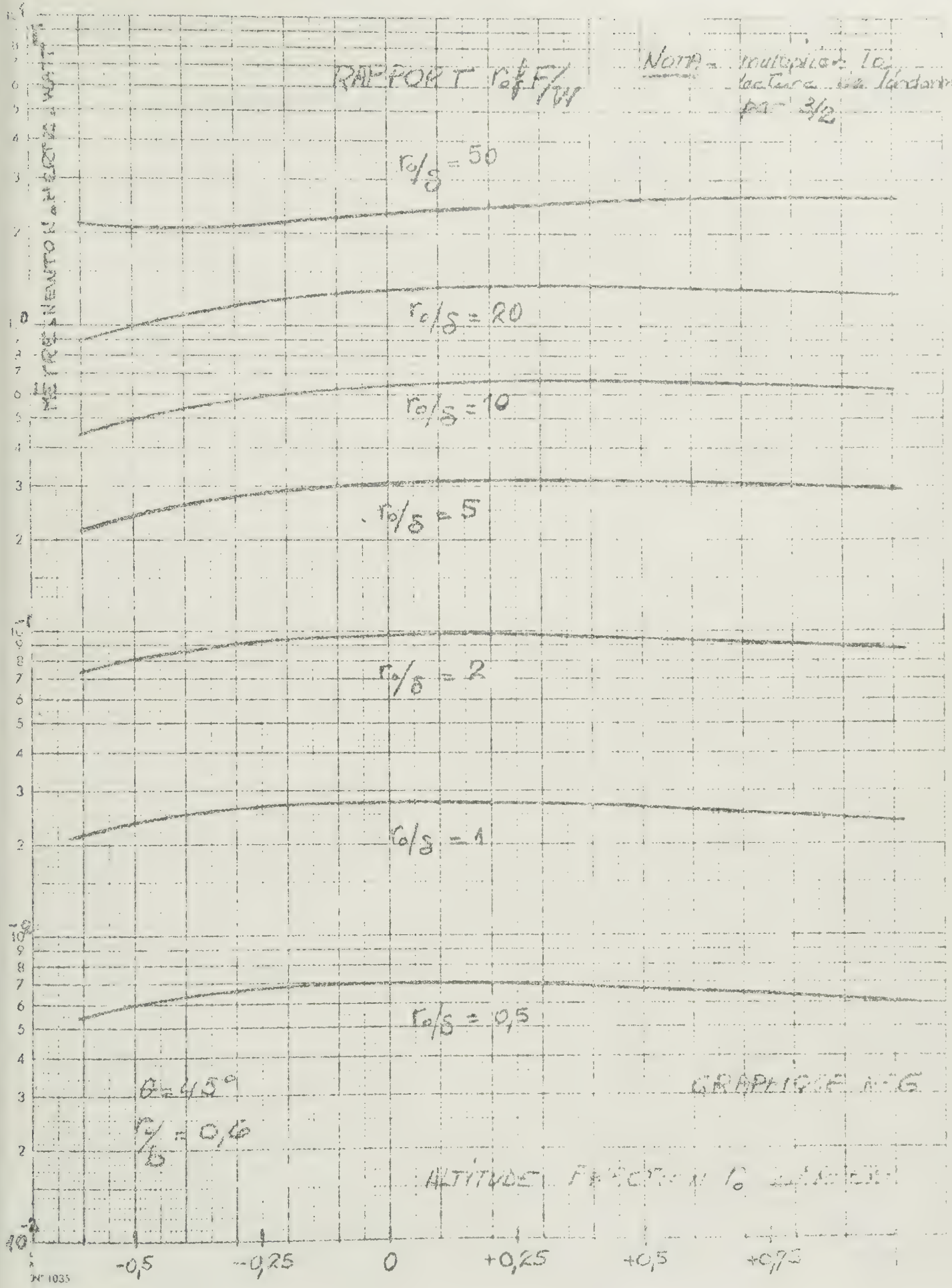
N° 1002

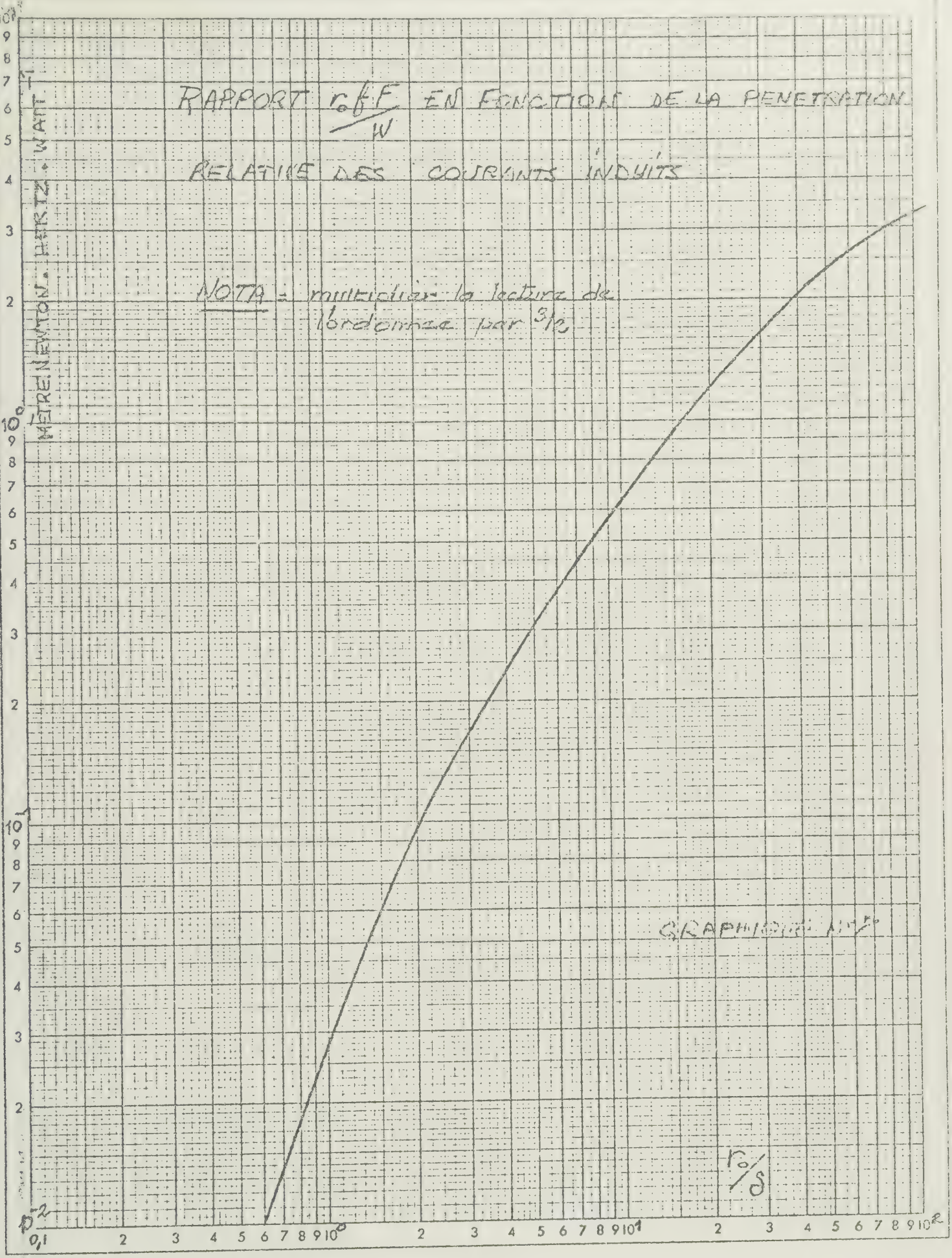
PUISSANCE DISSIPÉE DANS LE BARREAU EN FONCTION DE L'ALTITUDE

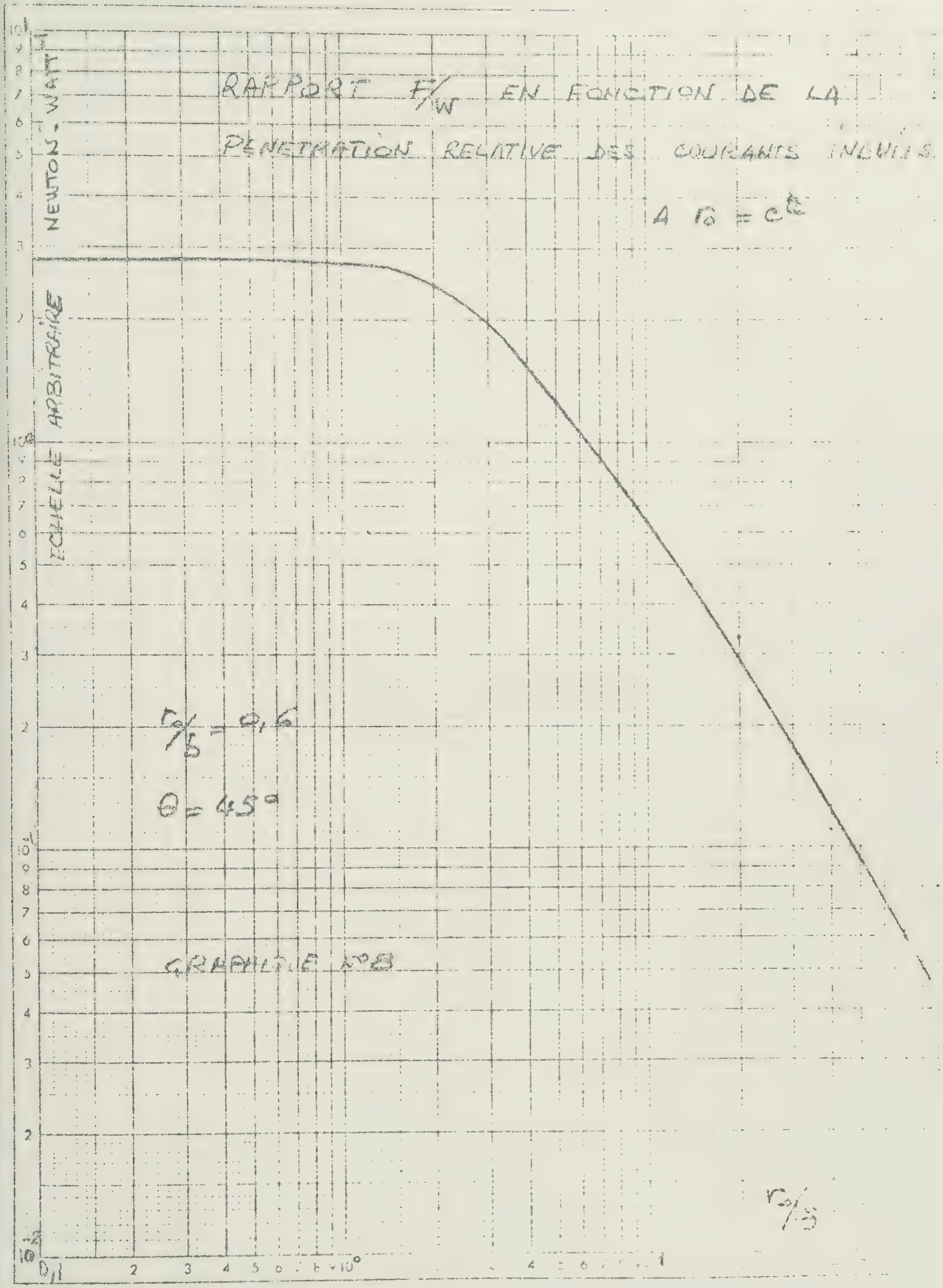


GRAPHIQUE N° 4


WATTS AMPERE⁻² METRE⁻¹
GRADUATIONS
PUISSANCE DISSIPÉE DANS LE BARREAU
EN FONCTION DE LA PENETRATION RELATIVE
DES COURANTS INDUITS
$r_0/b = 0,6$
$\theta = 45°$
r_0/s


RAPPORT r₀/F/w
Nota : multiplier la lecture de l'ordonnée par 3/2
r₀/δ = 50
r₀/δ = 20
r₀/δ = 10
r₀/δ = 5
r₀/δ = 2
r₀/δ = 1
r₀/δ = 0,5
θ = 4,5°
r/b = 0,4
-0,5
-0,25
0
+0,25
+0,5
+0,75


RAPPORT r₀fF / W EN FONCTION DE LA PENETRATION RELATIVE DES COURANTS INDUITS
NOTA = multiplier la lecture de l'ordonnée par 3/2
METRE NEWTON - HERTZ WATT
GRAPHIQUE N°2
r₀/δ


RAPPORT F/W EN FONCTION DE LA
PÉNÉTRATION RELATIVE DES COURANTS INDUITS
A r₀ = cte
NEWTON - WATT
ÉCHELLE ARBITRAIRE
r/s = 0,6
θ = 45°
GRAPHIQUE N°8
r/s
N° 1002

CHAPITRE 4

RESULTATS EXPERIMENTAUX

Ce chapitre comporte deux aspects principaux :

D'une part la comparaison entre les prévisions théoriques, telles qu'elles peuvent découler des formules établies dans le chapitre 2, et les résultats de mesures. Deux types d'expériences furent réalisés ; l'un à bas niveau de puissance, pour permettre un dispositif expérimental commode et une bonne précision des mesures - c'est celui qui concerne les "forces". L'autre à puissance normale, qui concerne les "puissances".

D'autre part des expériences très qualitatives de sustentation de liquides, dont le succès atteste de l'utilité du critère exprimé dans le présent travail :

MESURES

En fin de compte, il s'agissait de mesurer soit des forces s'exerçant sur des barreaux conducteurs, soit des puissances dissipées dans ceux-ci. Les positions par rapport à l'inducteur , essentiellement constitué par deux courants rectilignes parallèles, étant variables.

Nous avons dû mesurer

1°) des intensités de courants haute fréquence

2°) des forces

3°) des températures

4°) des dimensions

5°) des résistivités électriques

6°) des fréquences

Photo N° 1

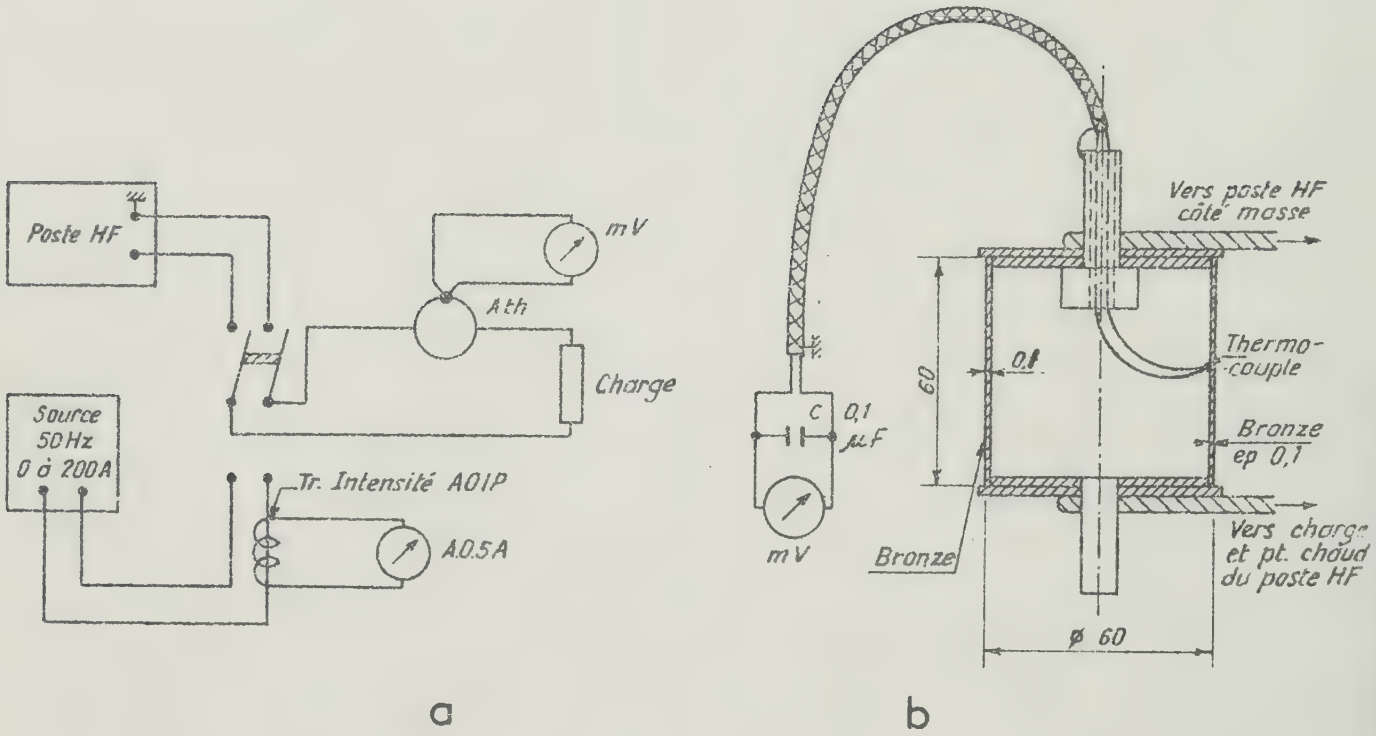

Poste HF
mV
Ath
Charge
Source
50 Hz
0 à 200A
Tr. Intensité A01P
A0.5A
a
Vers poste HF
côté masse
Thermo-
couple
0,1
60
C
0,1
µF
mV
Bronze
Bronze
ep 0,1
Vers charge
et pt. chaud
du poste HF
ø 60
b

FIGURE N° 21

1°) MESURE DES INTENSITES DE COURANTS

Soit à mesurer à quelques pourcents près des intensités de courants de plusieurs dizaines voire plusieurs centaines d'Ampères à des fréquences de 100 à 400 kiloHertz.

A notre connaissance, il n'existait pas d'ampèremètre convenable dans le commerce et encore moins dans notre laboratoire.

Nous avons procédé comme suit :

A l'aide d'une source de courant industrielle de 50 Hertz et d'un bon ampèremètre sur transformateur d'intensité nous avons étalonné un ampèremètre thermique de notre fabrication constitué par un cylindre en bronze à paroi mince devant les épaisseurs de peau, visible sur la PHOTO n° 1 et schématisé sur la figure n° 21 , avec le dispositif d'étalonnage à 50 Hz.

Ce dispositif étant délicat à utiliser par suite de sa grande sensibilité aux variations du régime de refroidissement (convection, température ambiante ...) nous l'avons surtout employé comme appareil de comparaison avec un ampèremètre électrodynamique également de notre construction et pouvant faire office d'appareil absolu puisque l'intensité de courant pouvait se calculer à partir de ses dimensions et des forces s'exerçant entre ses éléments.

Il était constitué essentiellement par une spire filiforme circulaire parcourue par le courant HF à mesurer, et une spire filiforme circulaire en court-circuit sur laquelle on mesure les forces de répulsion développées par le courant HF à déterminer.

La PHOTO n° 1 montre également la disposition des deux spires. La spire mobile constituée par un fil d'or de Ø 0,5 mm est maintenue entre deux disques de mica eux-mêmes assujettis à une tige de plexiglass transmettant la force de répulsion au fléau d'une balance.
L'ensemble du système est visible sur la PHOTO n° 2.

Z-N-0

La formule reliant : force répulsive, intensité de courant et dimensions est établie en annexe n° 10.

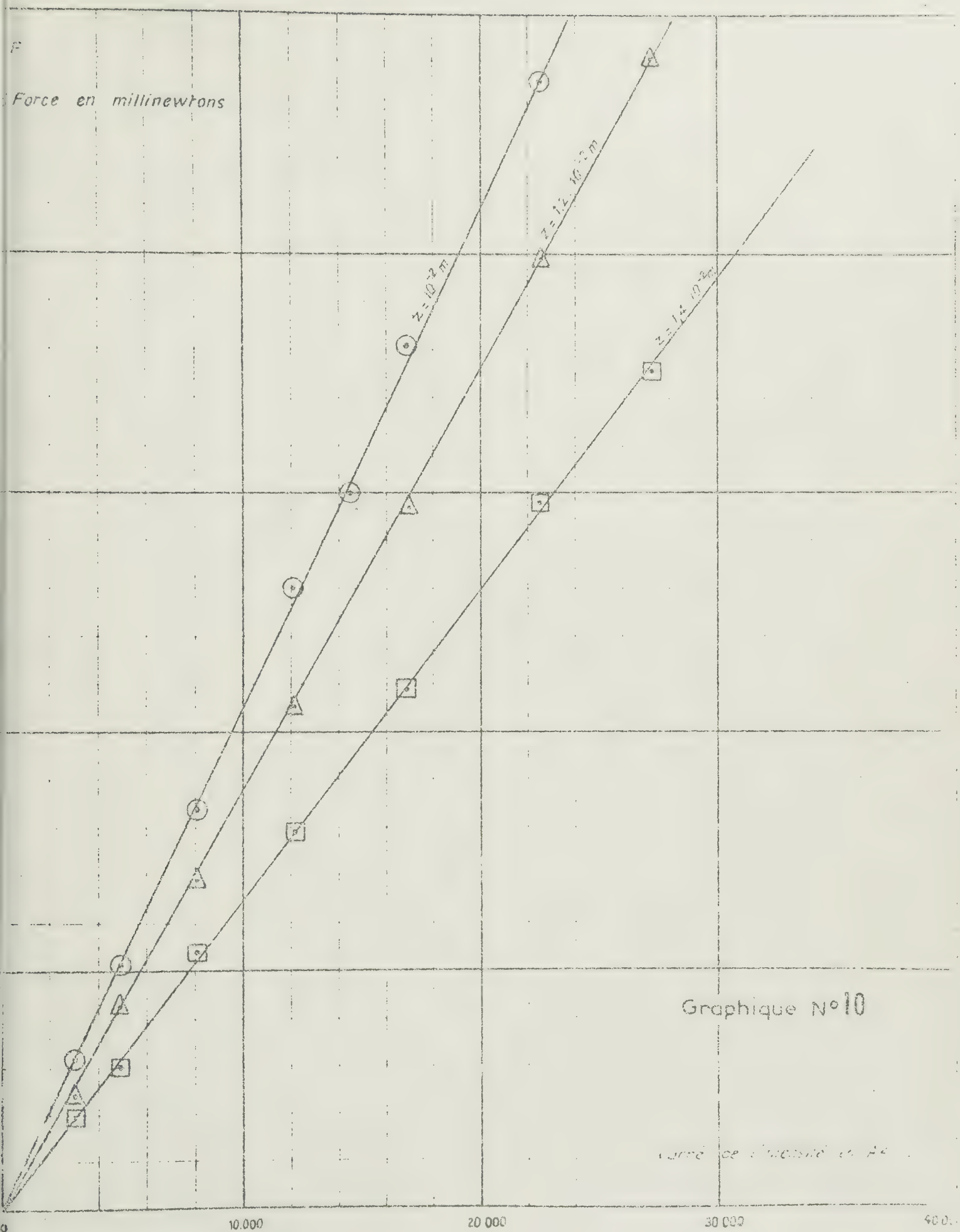
Le graphique n° 10, montre que la force répulsive est bien proportionnelle au carré de l'intensité du courant (mesurée à l'ampèremètre thermique) et le graphique n° 11, que le coefficient de proportion est bien celui calculé, si l'on considère la courbe tracée par le calcul sur ce dernier graphique.

2°) MESURES DES FORCES

Nous avons utilisé une balance à pesée automatique par chaîne visible sur la PHOTO n° 3. L'équilibre étant obtenu avec, d'un côté du fléau le cylindre conducteur sur lequel on veut évaluer les forces de lévitation et de l'autre un plateau taré, on mesure les forces répulsives sur le cylindre, qui se traduisent par des variations de poids de celui-ci, à l'aide du curseur "C" dont le changement de position peut affecter la masse de tarage par l'intermédiaire de la chaîne "CH" dont une extrêmité est fixée au curseur et l'autre au fléau de la balance. La position du curseur, qui est une mesure de la variation de poids apparent du cylindre, est enregistrée sur le tambour tournant "T". Le rééquilibrage du fléau est automatique le mouvement du moteur de curseur étant asservi à la position du fléau par le moyen d'une cellule photoélectrique, la pleine déviation du curseur représentant 10^{-2} N, il était possible d'apprécier 10^{-4} N.

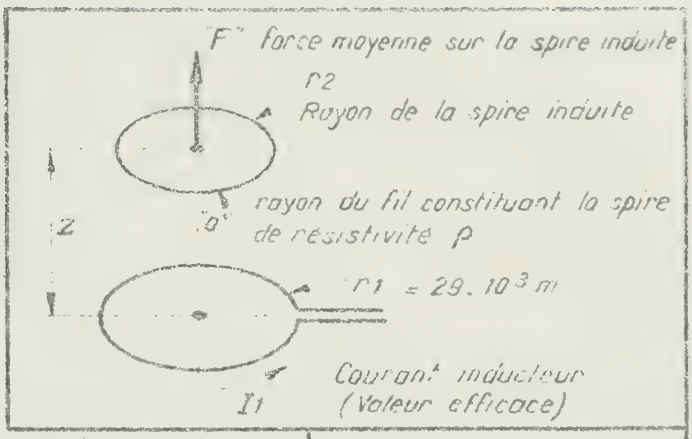
3°) MESURES DES TEMPERATURES

Ces mesures ont été faites avec un micro-pyromètre à luminance (disparition de filament) muni d'un filtre rouge (0,65µ)



Graphique N°10

N° 11



$\frac{F}{I_1^2} = f(z)$

pour f = 1500 KHz

r_2 = 0,02 m

$\frac{F}{I_1^2} \cdot 10^7$ (Newtons / Amp²)

Courbe calculée

$z \cdot 10^3$ (m)

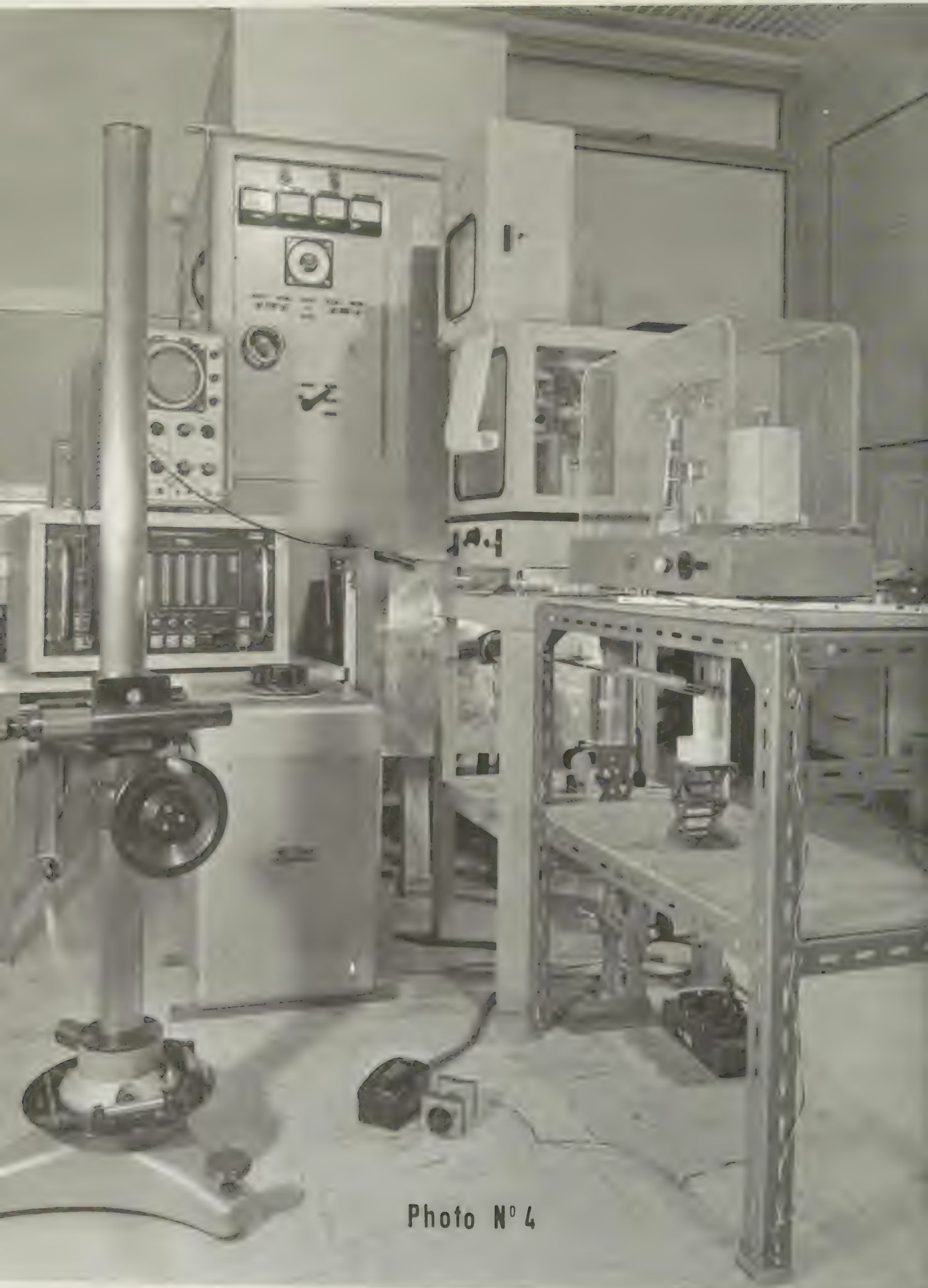


Photo N° 4

4°) MESURES DES DIMENSIONS

Les dimensions des spires et barreaux cylindriques ont été mesurées soit au pied à coulisse soit au micromètre.

Les positions des spires entre elles ou des cylindres par rapport au système inducteur ont été mesurées à l'aide d'un cathétomètre visible sur la PHOTO n° 4.

5°) MESURES DES RESISTIVITES ELECTRIQUES

Elles ont été mesurées sur les barreaux d'épreuve , à la température ambiante, à l'aide du montage classique, pour les résistances très faibles, de HOCKIN et MATHIESSEN.

Les corrections en fonction de la température ont été calculées en prenant les coefficients dans les manuels.

6°) MESURES DES FREQUENCES

Les fréquences ont été mesurées avec un fréquencemètre électronique digital visible sur la PHOTO n° 4

La forme sinusoïdale du courant a été contrôlée avec un oscilloscope visible sur la même photographie.

4°) MESURES DE [illegible]

[illegible]

5°) MESURES [illegible] DISTINCTIVES [illegible]

[illegible]

6°) MESURES [illegible] PRECONISEES

[illegible]

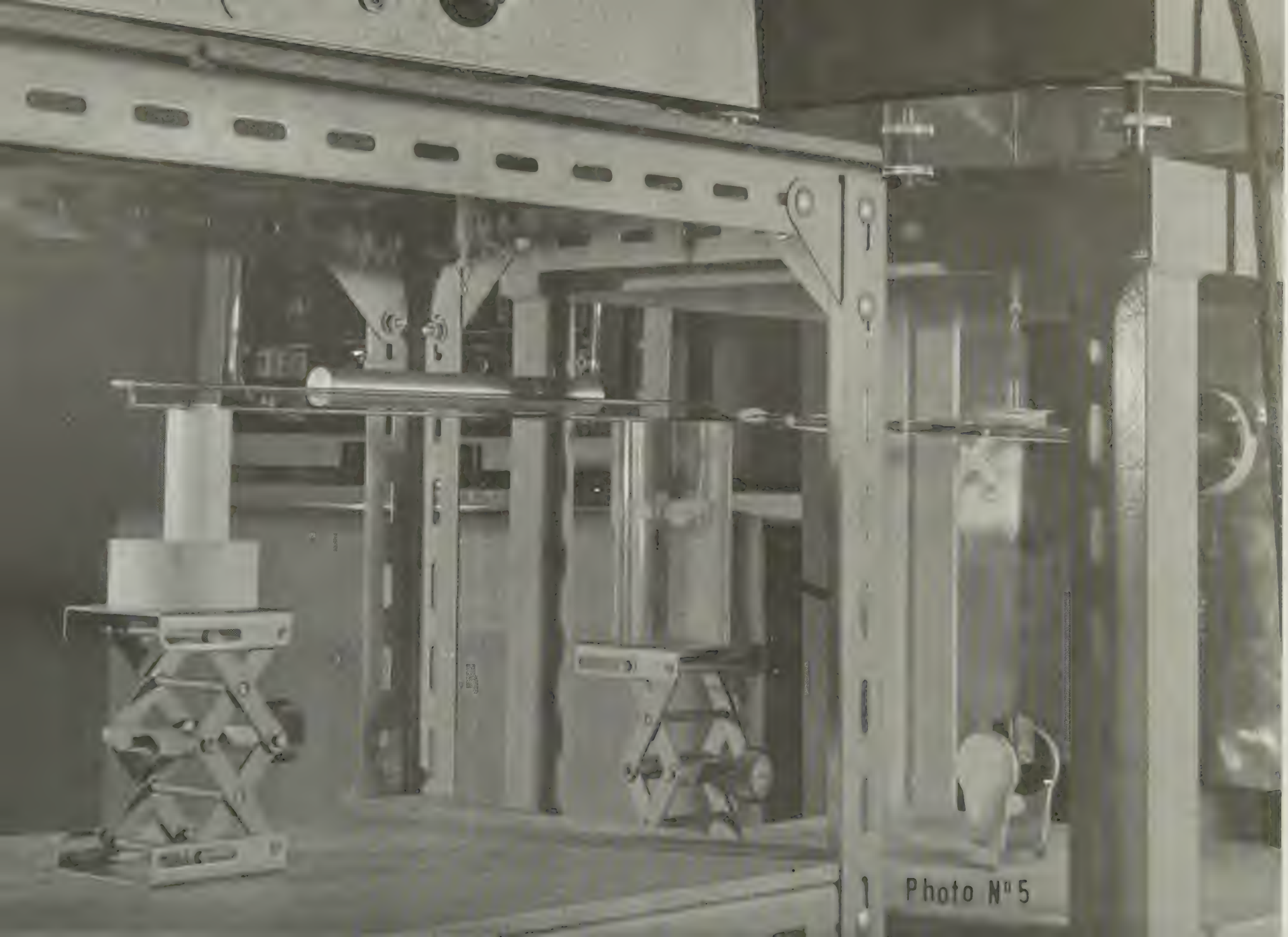


Photo N° 5

VERIFICATION DES FORCES DE LEVITATION

La PHOTO n° 4 montre l'ensemble du dispositif expérimental utilisé pour mesurer les forces de lévitation s'exerçant sur un cylindre circulaire droit, en fonction de la fréquence et de l'intensité du courant inducteur et de la position du cylindre dans le système.

La PHOTO n° 5 montre le détail d'un tel système constitué d'un inducteur en tube de cuivre de Ø 3mm d'un cylindre de Ø 30 mm et longueur 300 mm suspendu au fléau d'une balance comme il a été dit dans un paragraphe précédent.

L'ampèremètre électrodynamique de mesure du courant HF est nettement visible sur cette PHOTO n° 5 (courant HF parcourant l'inducteur)

Les barreaux cylindriques utilisés au cours des expériences furent au nombre de trois :

1 barreau d'Aluminium
1 barreau de Titane
1 barreau de Graphite

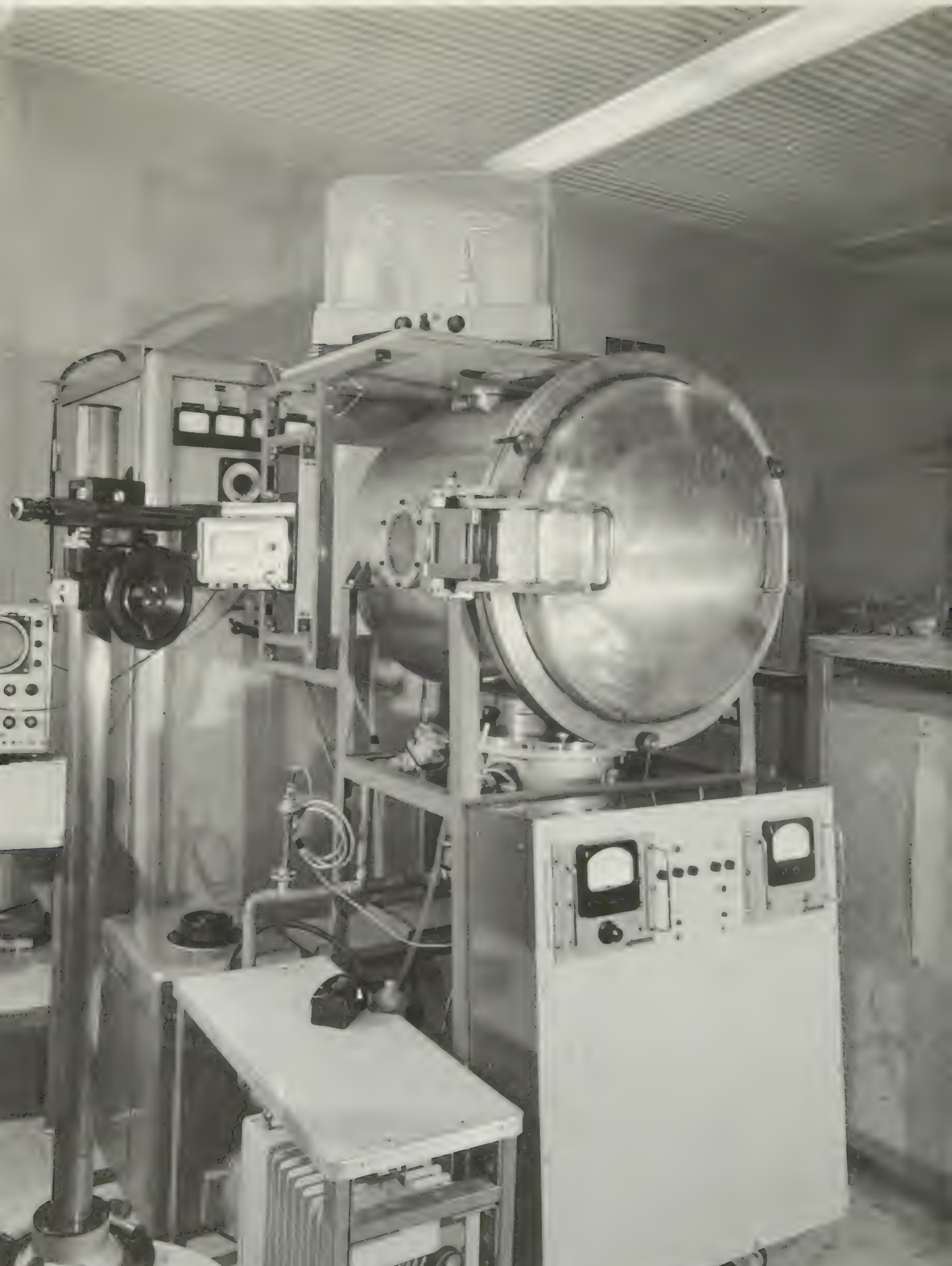


photo n

VERIFICATION DE LA PUISSANCE DISSIPEE

La vérification est plus malaisée que pour les forces. Nous avons choisi de déterminer la puissance dissipée dans un barreau en cours de lévitation par la mesure de sa température en se plaçant dans des conditions connues de dissipation.

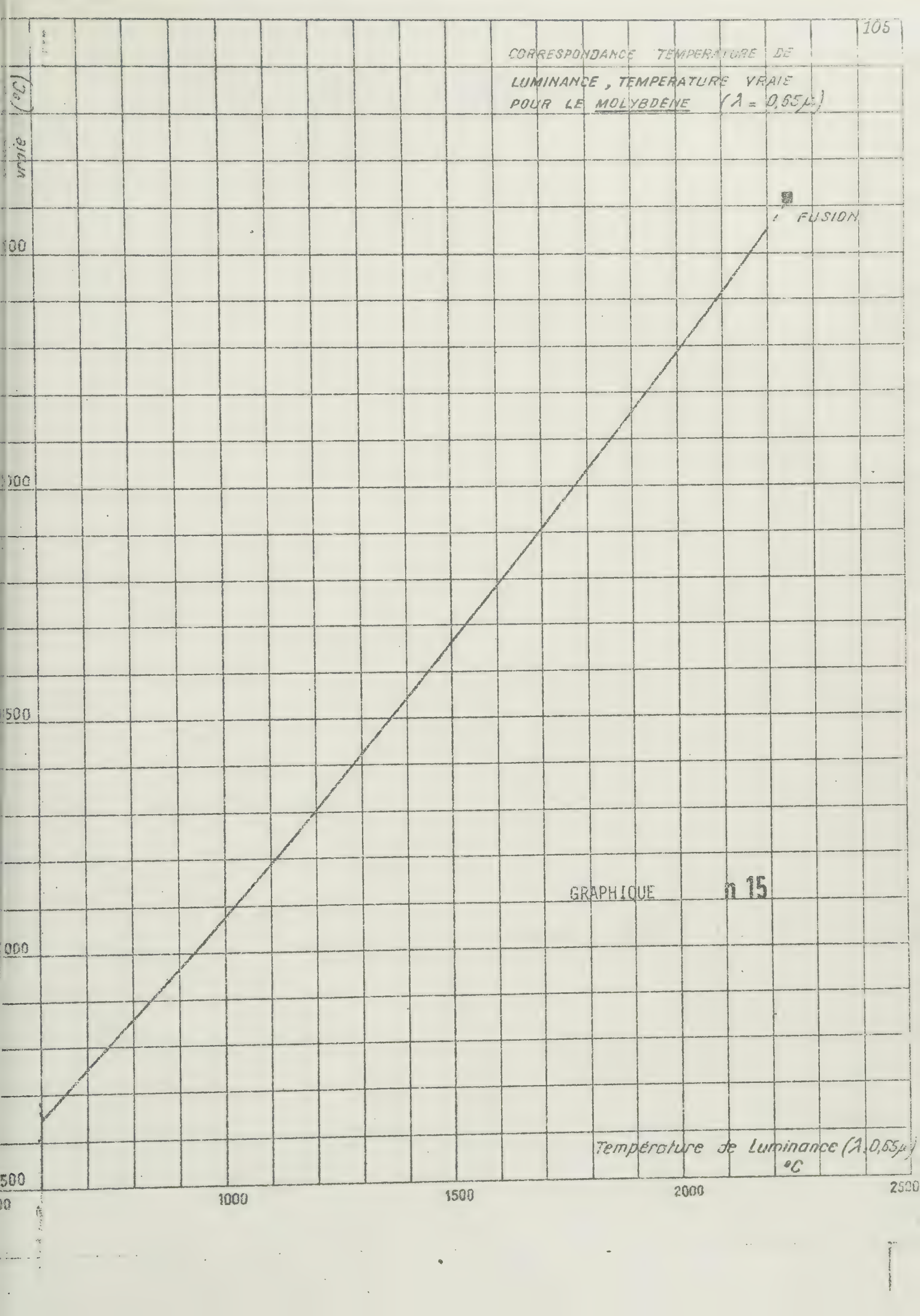
Le plus simple était de travailler sous un bon vide afin d'éliminer toutes les pertes par convexion des gaz. Les pertes par conduction étant absentes par nature, seules restaient les pertes par rayonnement, dont les lois sont bien connues et leurs valeurs calculables avec sécurité, sous réserve de connaître le pouvoir émissif total du corps éprouvé à la température considérée.

Nous avons retenu le MOLYBDENE comme matériau d'épreuve parce que sa résistivité électrique et son pouvoir émissif total sont assez bien connus dans les conditions d'emploi.

La PHOTO N° 6 montre l'enceinte à vide dans laquelle les expériences ont été menées avec le cathétomètre qui servit à définir la position du barreau.

Les mesures ont porté sur un cylindre de Ø 10 mm, longueur 100 mm, dont les propriétés physiques ont été supposées conformes à celles décrites par les graphiques n° 15, 16, 17, de masse 82g et de surface extérieure 34cm2.

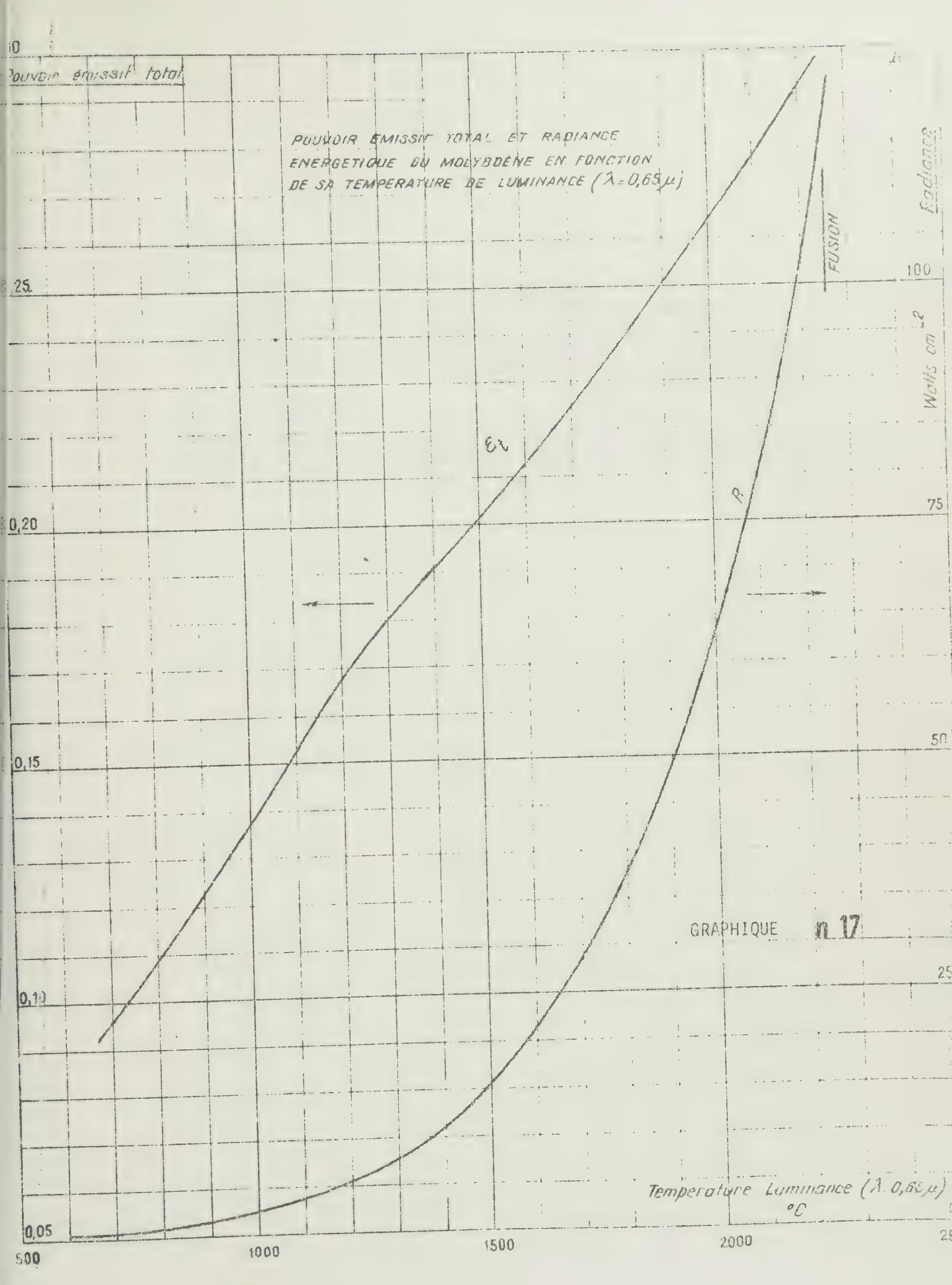
CORRESPONDANCE TEMPERATURE DE LUMINANCE, TEMPERATURE VRAIE POUR LE MOLYBDENE ($\lambda = 0{,}65\mu$)



GRAPHIQUE n 15

CONDUCTIVITE et RESISTIVITE DU MOLYBDENE
en fonction de sa température de luminance ($\lambda = 0{,}65\,\mu$)

GRAPHIQUE n 16

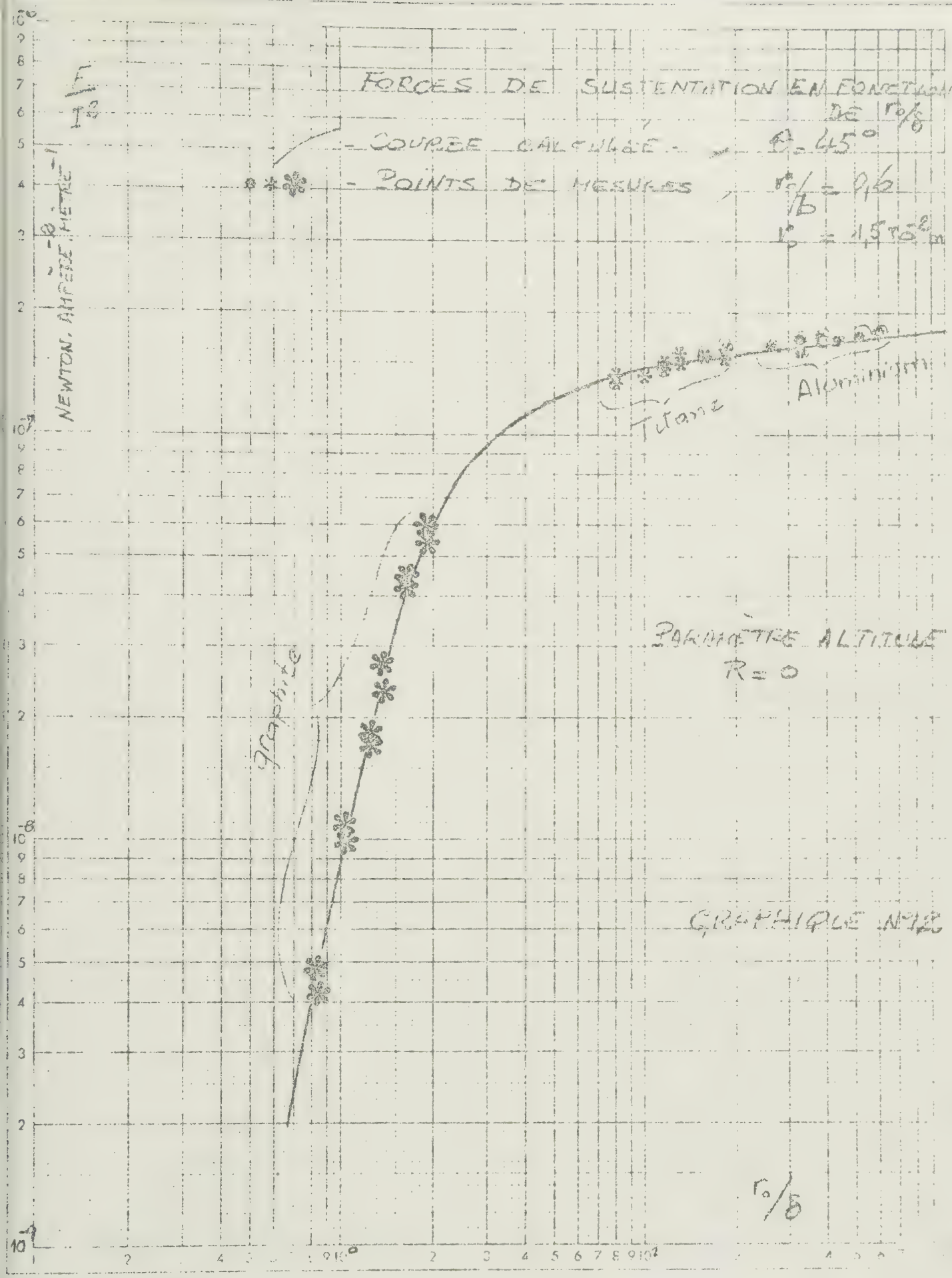


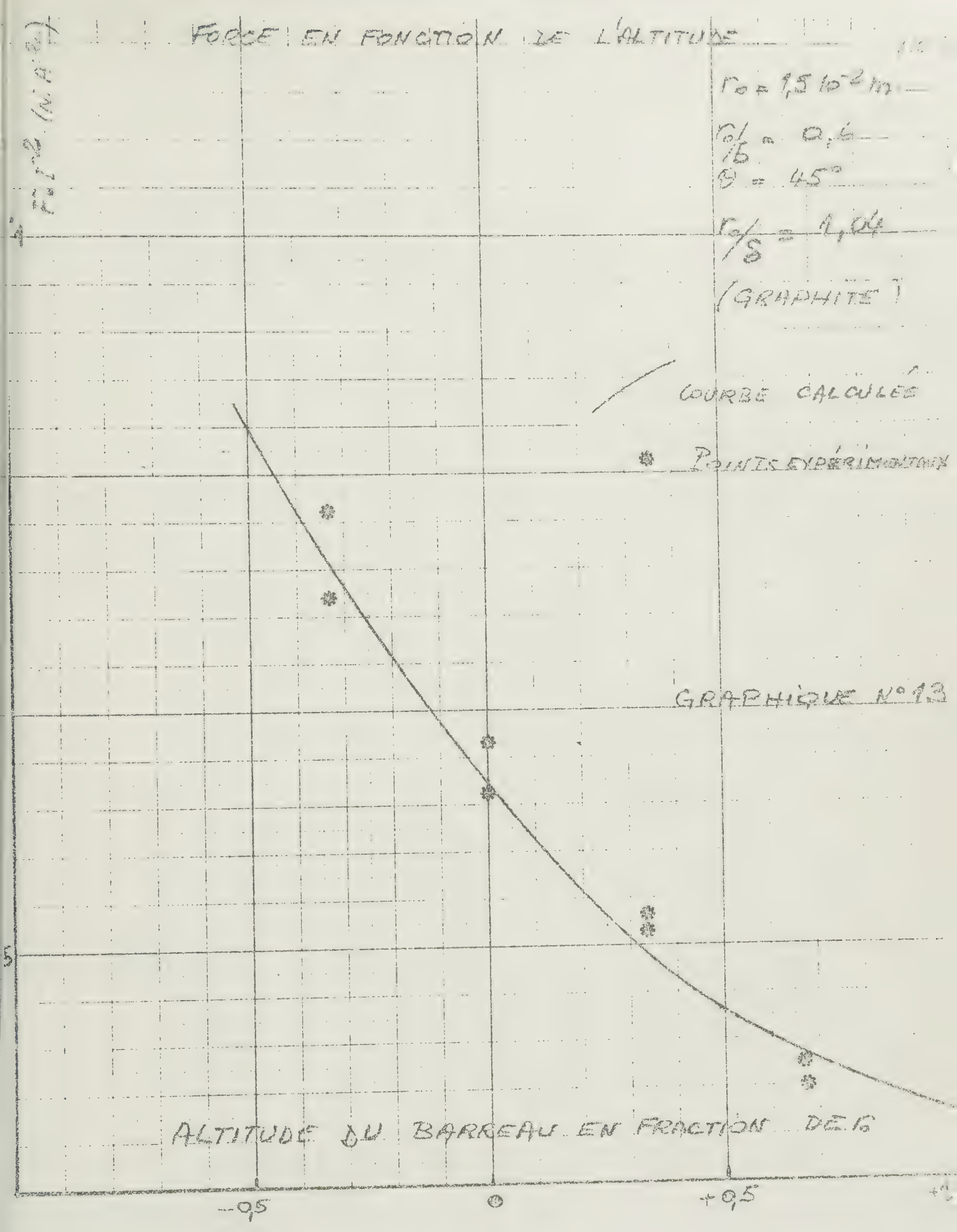
GRAPHIQUE n. 17

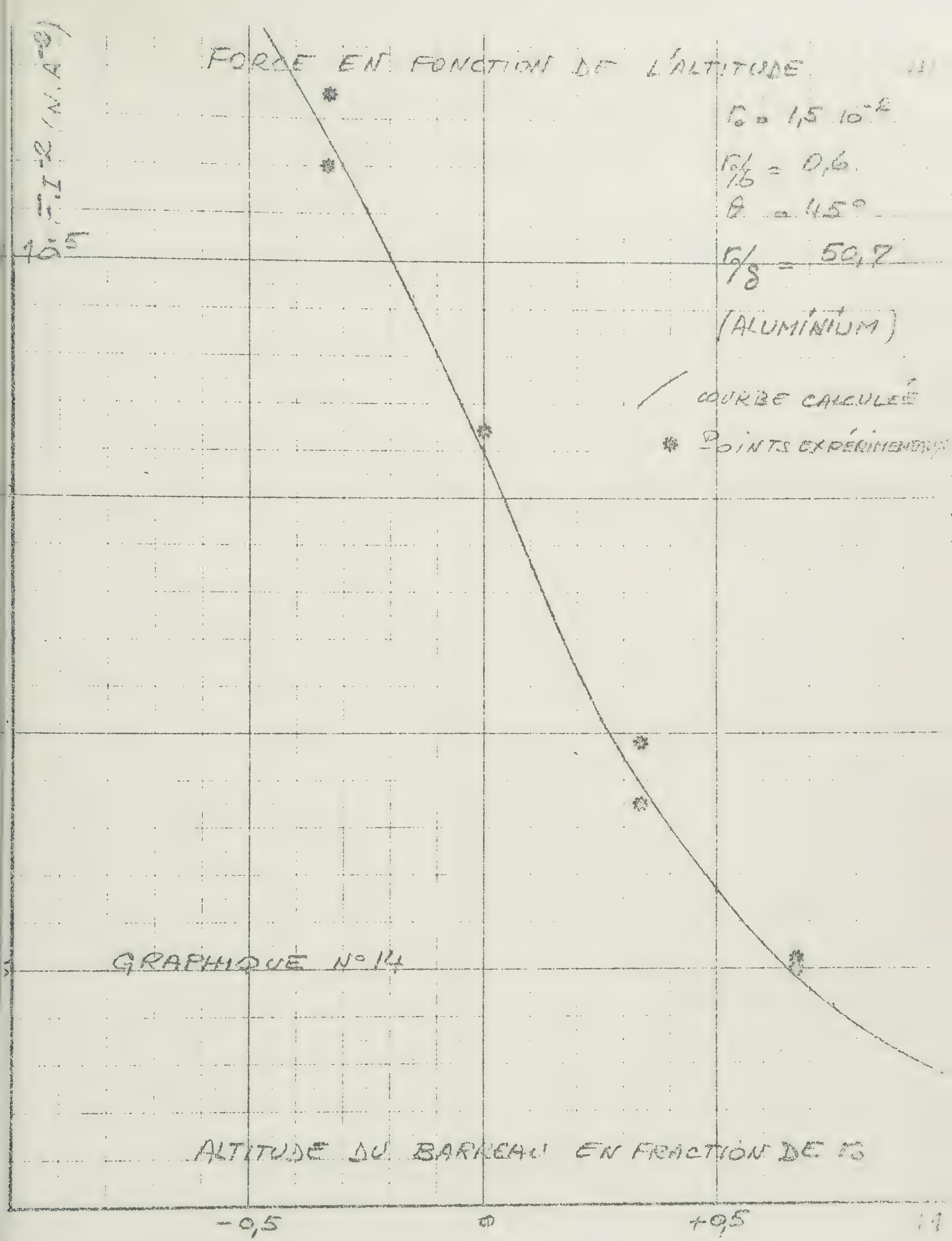
RESULTATS

On remarquera la bonne concordance entre les observations et les prévisions théoriques, surtout en ce qui concerne les forces où la précision des mesures était bien supérieure à celles des mesures de puissance, eu égard à l'incertitude de détermination du pouvoir émissif.

Les résultats sont résumés sur les graphique n° 12 - 13 - 14 et n° 18 donnant respectivement les différentes mesures de forces pour les trois premiers et une mesure indirecte de puissance dissipée dans le barreau pour le dernier.

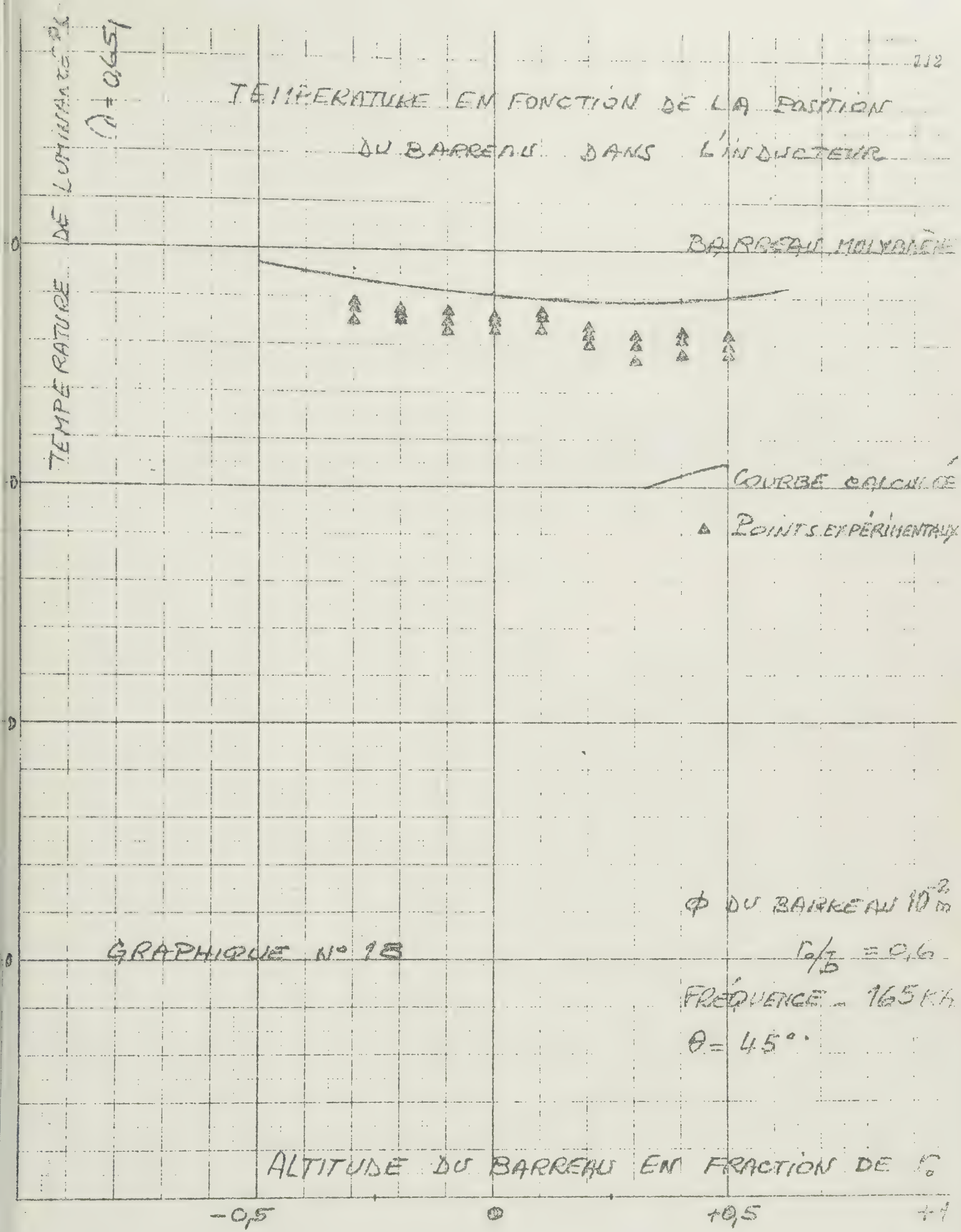

FORCES DE SUSTENTATION EN FONCTION DE r_0/b
COURBE CALCULÉE — $\Phi = 45°$
POINTS DE MESURES — $r_0/b = 0{,}62$
$I_0 = 1{,}5 \cdot 10^{-2}$ A
$\frac{F}{I^2}$
NEWTON. AMPÈRE. MÈTRE^{-1}
Aluminium
Titane
Graphite
PARAMÈTRE ALTITUDE
R = 0
GRAPHIQUE N°12
r_0/b


FORCE EN FONCTION DE L'ALTITUDE
$r_0 = 1{,}5\ 10^{-2}$ m
$r_0/b = 0{,}6$
$\theta = 45°$
$r_0/\delta = 1{,}64$
(GRAPHITE)
COURBE CALCULÉE
POINTS EXPÉRIMENTAUX
GRAPHIQUE N° 13
ALTITUDE DU BARREAU EN FRACTION DE r_0
-0,5
0
+0,5



GRAPHIQUE N° 14

TEMPERATURE EN FONCTION DE LA POSITION DU BARREAU DANS L'INDUCTEUR



GRAPHIQUE N° 15

Le Creusot

EXPERIENCES QUALITATIVES

Dans l'ordre qualitatif, nous avons fait des expériences de sustentation de masses d'aluminium de cuivre et de titane liquides,

Pour cela nous avons réalisé un inducteur conforme au schéma de la figure n° 4 alimenté par deux générateurs aux fréquences de 100 et 200 kHz. Les expériences ont été enregistrées sur pellicule. Ce film montre bien que qualitativement, les propriétés de notre dispositif vis à vis de la sustentation de masses liquides importantes.

CHAPITRE 5

APPLICATIONS

INTERET DU PROCEDE

Sous l'angle des applications, la lévitation électromagnétique des liquides conducteurs peut servir comme une technique métallurgique de fusion.

En métallurgie, les procédés de fusion ont un double intérêt.

a) affinage ou formation des alliages
b) coulée en fonderie.

Le domaine d'élection de la fusion flottante par induction électromagnétique est évidemment confondu avec celui des alliages et métaux :

a) réactifs chimiquement
b) réfractaires
c) de haute pureté.

Le procédé est en fait une nouvelle génération du classique chauffage par induction dont les inconvénients bien connus sont dus à la présence du creuset, par :

a) limitation de température
b) génération d'inclusions

Dans cette perspective, le procédé n'est pas sans concurrent. Peut-être n'est-il pas inintéressant de rappeler rapidement les deux procédés qui pourraient lui être opposés et de mettre en évidence à l'aide d'un examen comparatif rapide quels pourraient être les points forts de la méthode étudiée dans le présent travail.

On peut citer comme concurrents éventuels :

a) la fusion à l'arc électrique
b) la fusion par bombardement électronique.

a) FUSION A L'ARC.-

Nous ne rappelerons pas ici la nature du procédé bien connue et décrite par ailleurs. Il peut revendiquer comme avantages :

- pollution faible et superficielle des alliages
- minimum de ségrégation
- faible retassure
- dégazage notable
- haute température possible
- bas prix de revient

Par contre, il n'est pas dépourvu d'inconvénients :

- le passage à l'état liquide est de courte durée
- la vitesse de fusion est incontrôlable
- la partie fondue est peu importante

.../...

- très difficile (sinon impossible) de couler des alliages pour la fonderie
- très grande difficulté à élaborer des alliages contrôlés
- enfin le vide ne peut être très poussé par essence même.

b) BOMBARDEMENT ELECTRONIQUE.-

Il présente tous les avantages du procédé à l'arc, sauf celui du bas prix de revient.

Par contre, il souffre d'une grande partie des inconvénients propres à la fusion à l'arc. Son avantage marqué est celui du contrôle de la vitesse de fusion. De plus, il travaille dans un bien meilleur vide que le précédent. On peut toutefois se demander si cela est un avantage général puisqu'il ne peut pas s'accommoder d'une atmosphère

c) LA LEVITATION ELECTROMAGNETIQUE.-

présenterait sur ses adversaires potentiels des avantages spécifiques, sans rien céder comparativement par ailleurs sur les autres, au plan technique tout au moins.

On peut noter comme traits fondamentaux :

- la possibilité d'élaborer des alliages sans contamination de PURETE et de CONSTITUTION bien HOMOGENES ET CONTROLEES, grâce à l'importance de la masse liquide isotherme et aux brassages magnétiques.

- possibilité de SURCHAUFFE à volonté en température et dans le temps, facteurs importants pour l'affinage et la fonderie.

- aptitude à la coulée de fonderie
- suppression totale des risques de pollution
- réduction au minimum des pertes d'énergie
- toute la charge est liquide
- réglage possible des vitesses de fusion et de solidification
- toutes les pressions d'atmosphère sont acceptables de l'ultra-vide aux hautes pressions.
- il est possible d'orienter la cristallisation des lingots.

	Contrôle composit.	Alliages homogènes	Dégazage	Ségrégat. minimum	Absence inclusion	Moulage par coulée	Hautes températ.	Contrôle températ.	Atmosphère ambiante (Gaz et Vide) indifférente
Induction	*	*	*			*		*	*
Arc électrode consommable				*	*		*		
Bombardement électronique			*	*	*		*		
Levitation	*	*	*	*	*	*	*	*	*

ESQUISSE D'UNE MORPHOLOGIE DES APPAREILS INDUSTRIELS

Il semble difficile d'imaginer des appareils industriels déduits des appareils de la présente étude par simple homothétie.

Nous pensons, et c'est une suggestion directe de l'examen des lois de similitudes, que les machines industrielles devront utiliser des circuits magnétiques à fer feuilleté travaillant aux fréquences acoustiques. Elles pourraient mettre en oeuvre des profils d'inducteurs dont les formes seraient directement tirées des courbes orthogonales données par les paire de fonctions conjuguées d'une variable complexe $z = x + jy$

On sait que $f(z) = u + jv$.

Si $f(z)$ satisfait aux conditions de CAUCHY sur l'unicité de la dérivée alors u et v satisfont l'équation de LAPLACE : $\Delta u = 0$ et $\Delta v = 0$

Toutes celles qui de plus satisfont la condition

$$grad\ (\ rot\ u\ )^2 > 0$$

$$grad\ (\ rot\ v\ )^2 > 0$$

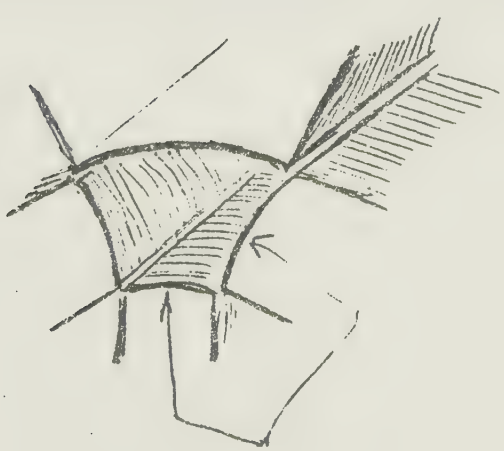
conviennent pour l'usage en question.

On peut citer ainsi parmi d'autres, les fonctions :

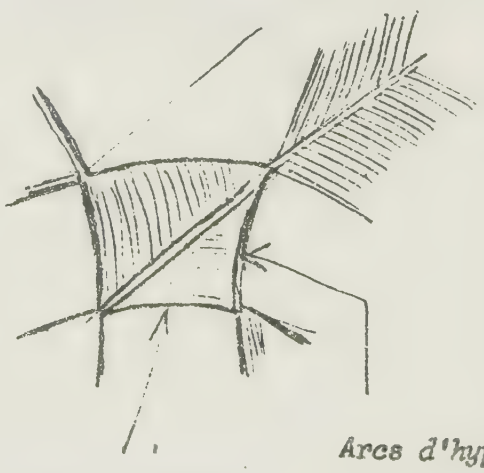
(A) $f(z) = K \log \left(\frac{z + a}{z - a}\right)$ *(arcs de cercles orthogonaux)*

(B) $f(z) = K \log \left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right)$ *(arcs d'ellipses et d'hyperboles orthogonaux)*

Les sections droites des fours de lévitation se présenteraient comme ci-dessous, délimitant un volume de mouffle où règneraient les deux champs d'induction orthogonaux indépendants.



Arcs de cercles



Arcs d'ellipses

Arcs d'hyperboles

ORDRES DE GRANDEURS

Les moyens à mettre en oeuvre pour une application industrielle sont tout à fait réalisables dans l'état actuel de l'électrotechnique.

Pour prendre un exemple d'intérêt actuel, considérons le cas de la fusion d'un lingot de TITANE en vue de la coulée dans un moule de fonderie. Le seuil d'utilité pratique pour la masse traitée se situe à environ 9 kg. soit un lingot cylindrique de 80mm de diamètre et 400 mm de longueur.

Il suffirait de créer une induction magnétique efficace de l'ordre de 0,1 Testa dans un entrefer de l'ordre de 0;1 et ceci pour des fréquences de 2 à 4 KHz.

On peut constater que les données électrotechniques sont très raisonnables et peuvent conduire à une solution en utilisant les connaissances qui font partie du "bagage" actuel d'un ingénieur.

AVANTAGE DU PROCEDE

On observera que le problème de la maîtrise de la température du [illegible] lévité peut être ici grandement facilité par l'existence des deux champs électromagnétiques concurrentiels pour la sustentation.

En effet, d'après leur situation dans l'espace, ils n'ont pas la mê "efficacité" de sustentation, c'est-à-dire n'offrent pas le même nombre de "watts par Newton" de force de lévitation.

Mais, comme d'autre part, une bonne latitude de réglage des intensités d'induction magnétique existe, on dispose d'une certaine plage de puissance dissipée dans un même corps supporté.

C'est une propriété intéressante du dispositif étudié dans le présent travail, que de pouvoir agir sur la puissance dissipée donc sur la température de façon appréciable, par un simple réglage d'intensité de champ. Il n'est plus nécessaire comme pour un système monochamp de disposer de générateurs à fréquence variable, ce qui, dans le domaine des appareils de fortes puissances nécessaires dans les applications industrielles est une sujettion qui retire beaucoup d'intérêt au procédé.

CHAPITRE 6

CONCLUSION

Nous avons montré, dans cette étude, que l'action conjuguée de deux champs électromagnétiques à des fréquences différentes constituait le procédé de choix pour obtenir la fusion, en état de lévitation, de matériaux conducteurs.

Les calculs théoriques ainsi que les vérifications expérimentales à petite échelle ont été poussés assez loin pour servir de base solide à des projets de réalisation industrielle, qui ne relèvent plus que de l'art de l'Ingénieur.

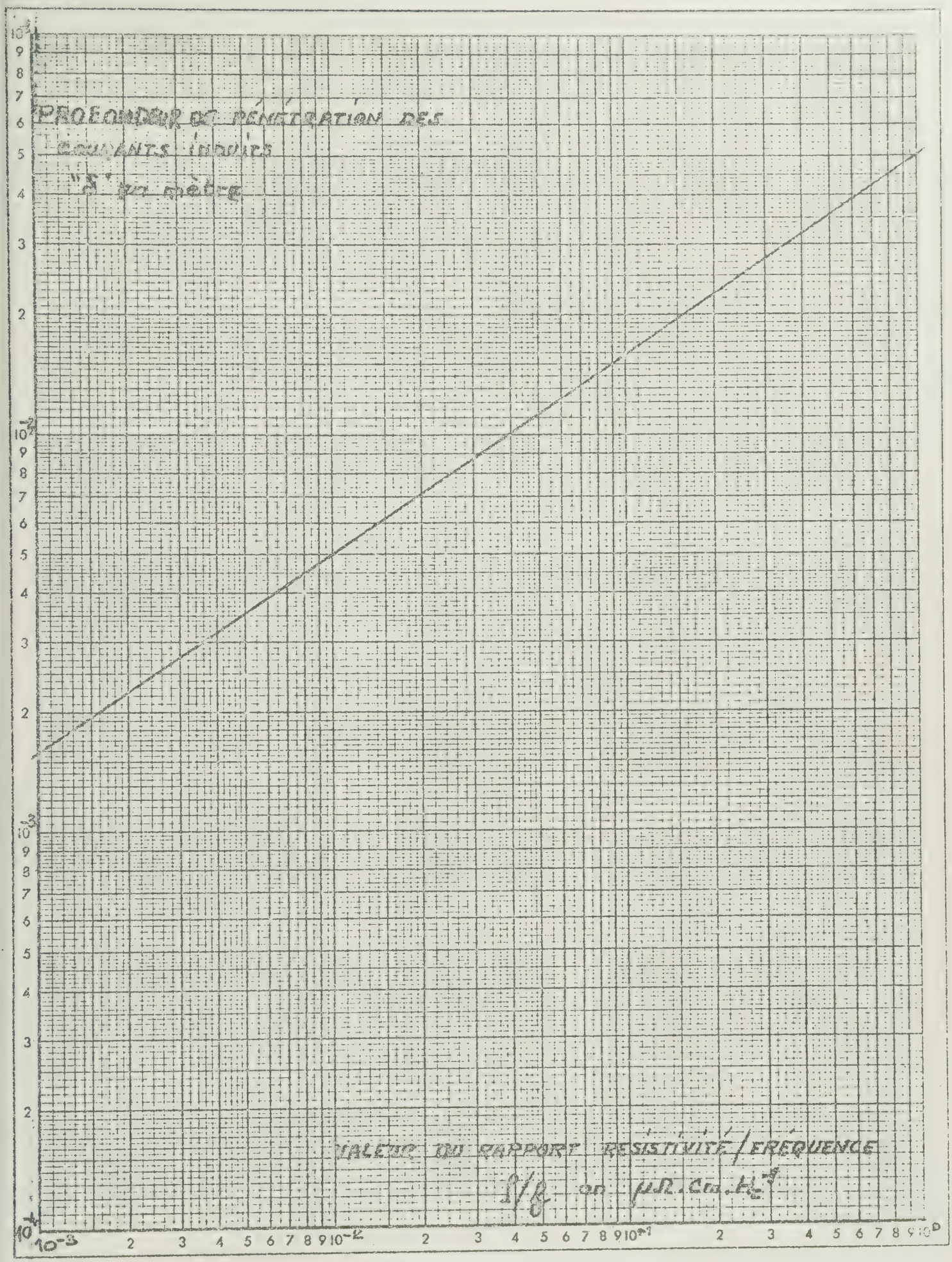
Les avantages certains que les métallurgistes pourraient tirer de la méthode ont été mis en évidence et des essais portant sur des masses de l'ordre de plusieurs centaines de grammes de matériaux difficiles à fondre proprement comme le TITANE ont été concluants.

Sur le plan scientifique cependant, une analyse plus fine des phénomènes au moment de la fusion nous semble présenter de l'intérêt, ainsi qu'une étude plus poussée de la stabilité et des mouvements de brassage à l'intérieur du métal en fusion sous l'action des forces électromagnétiques.

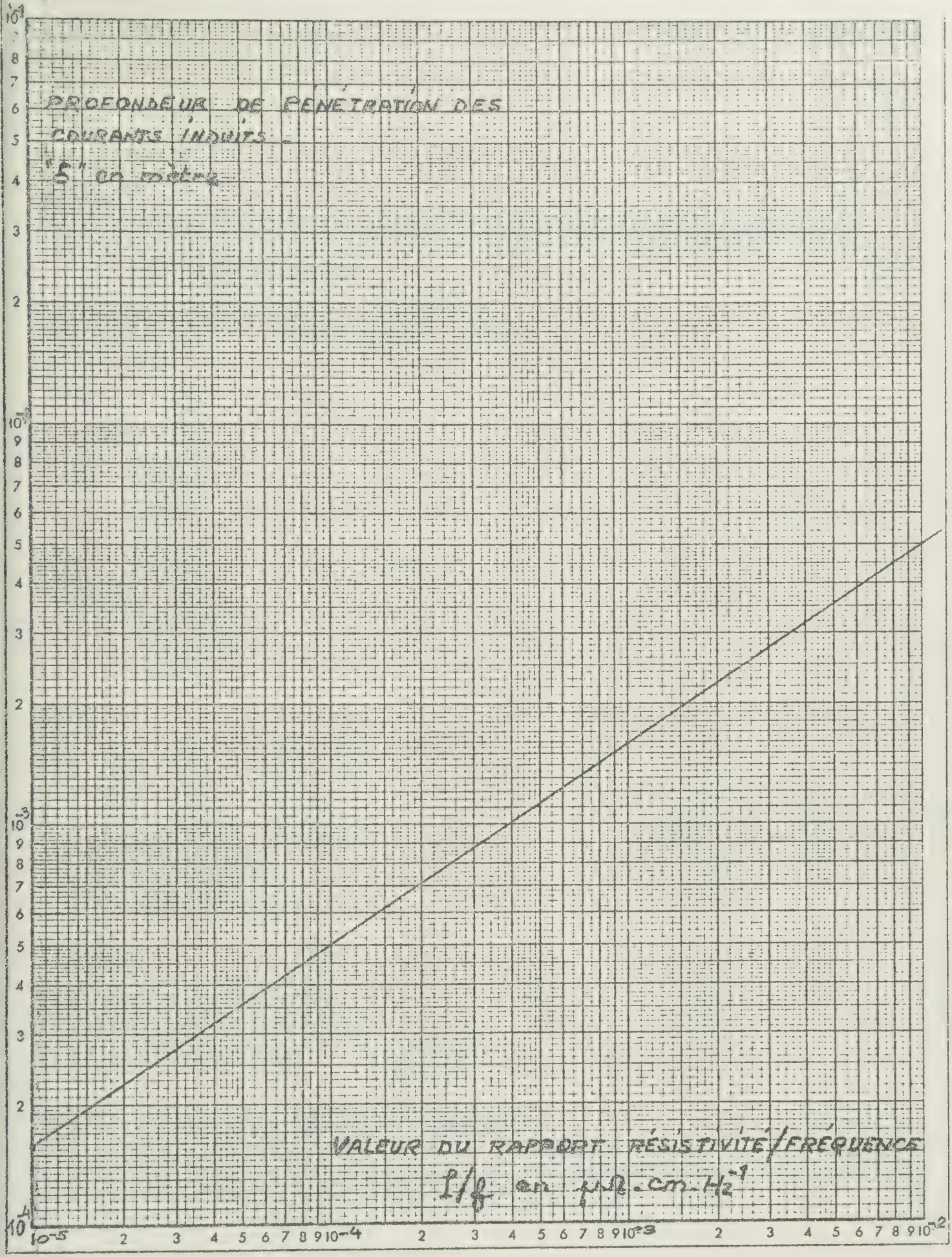
De tels travaux permettraient de mieux maîtriser la mise en oeuvre du procédé et la recherche des configurations optimales d'inducteurs.

Des applications plus sophistiquées que la simple fusion sans creuset, telles que l'affinage par fusion de zone de matériaux en état de lévitation pourraient alors être abordées.

ANNEXES


PROFONDEUR DE PÉNÉTRATION DES
COURANTS INDUITS
"δ" en mètre
VALEUR DU RAPPORT RESISTIVITÉ / FREQUENCE
ρ/f en μΩ.cm.Hz⁻¹
10⁻³ 2 3 4 5 6 7 8 9 10⁻² 2 3 4 5 6 7 8 9 10⁻¹ 2 3 4 5 6 7 8 9 10⁰

N° 1002


PROFONDEUR DE PÉNÉTRATION DES COURANTS INDUITS
"δ" en mètre
VALEUR DU RAPPORT RÉSISTIVITÉ/FRÉQUENCE
ρ/f en μΩ.cm.Hz⁻¹

BP 1002

ANNEXE 1

REVUE DES MOYENS DE LEVITATION AUTRES QUE LES FORCES ELECTROMAGNETIQUES

1°) Forces de gravitation
2°) Forces d'impulsions dynamiques
3°) Forces de pression de radiation
4°) Forces électro et magnétostatiques

1.- FORCES DE GRAVITATION

Ce moyen est irréalisable pratiquement. Il faudrait rassembler une masse de matière capable d'annuler le champ de gravitation à la surface de la terre. On a calculé que pour ce faire, en utilisant le corps le plus dense à notre disposition, il faudrait construire une sphère dont le diamètre serait environ 0,24 fois le rayon terrestre.

2.- FORCES D'IMPULSIONS DYNAMIQUES

Cela n'est guère pratique pour notre objet. Il faudrait pour léviter un corps de poids P, qu'il expulse vers la terre, chaque seconde, une quantité M de matière, à la vitesse V, telle que :

$$P = MV$$

3.- FORCES DE PRESSION DE RADIATION

Il s'agit ici de la pression de radiation d'une onde électromagnétique, émise absorbée ou réfléchie, par le corps à léviter, à l'exclusion de pressions d'ondes matérielles, telles qu'acoustiques par exemple, qui exigent un environnement matériel, donc un contact incompatible avec notre définition de la lévitation.

Le procédé est utopique, puisque la puissance radiée requise par unité de masse est donnée par l'expression :

$$W = \frac{1}{2} G.c$$

G accélération de la pesanteur
c vitesse de la lumière

pour une masse de 1 g on trouve $W = 1{,}5.10^6$ *Watts.*

4.- FORCES ELECTRO ou MAGNETO-STATIQUES

Seuls les corps diamagnétiques (ou supraconducteurs) peuvent être lévités avec succès dans un champ magnéto-statique.

Le théorème d'EARSHAW démontre que l'équilibre stable d'un corps de permittivité ε est impossible dans un champ électrostatique. Par analogie, il en est de même pour tous corps ferro ou paramagnétique dans un champ magnéto-statique.

CAS DES FORCES ELECTRO-MAGNETIQUES

Lorsqu'un corps conducteur de l'électricité est plongé dans un CHAMP MAGNETIQUE VARIABLE *il devient le siège de courants de Foucault.*

Il est bien connu que si le CHAMP MAGNETIQUE *inducteur est* NON UNIFORME *les courants induits réagiront sur lui de telle sorte que des forces s'exerceront sur la matière du corps induit.*

Le plus souvent ces forces seront répulsives et pourront être utilisées pour sustenter un objet constitué de matière conductrice.

ANNEXE 2

LIGNES DE FORCE ET EQUIPOTENTIELLES - DISTRIBUTION A DEUX DIMENSIONS

Les lignes de force, ou tubes de flux d'induction sont définies par

$$\vec{B} \wedge \vec{dl} = 0$$

dl élément de ligne de force
on peut écrire, dans un système de coordonnées cylindriques

$$\frac{B_\phi}{r.d\phi} = \frac{B_r}{dr}$$ *en traduisant la relation précédente*

Comme

$$\vec{B_\phi} = \overrightarrow{Rot_\phi}\ \vec{A} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial r} \quad et \quad \vec{B_r} = \overrightarrow{Rot_r}\ \vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial \vec{A}}{\partial \phi}$$

Il vient

$$\frac{\partial \vec{A}/\partial r}{d\phi} + \frac{\partial \vec{A}/\partial \phi}{dr} = 0$$

et

$$\frac{dr}{d\phi} = -\frac{\partial \vec{A}/\partial \phi}{\partial A/\partial r}$$

Comme d'autre part, on sait que sur la courbe A (ϕ, r) quelconque, on a :

$$\frac{dA}{d\phi} = \frac{\partial A}{\partial \phi} + \frac{\partial A}{\partial r} \cdot \frac{dr}{d\phi}$$

alors dans notre cas

$$\frac{dA}{d\phi} = 0 \quad et\ de\ même \quad \frac{dA}{dr} = 0$$

(puisque $\frac{dA}{dr} = \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{\partial A}{\partial \phi} \cdot \frac{d\phi}{dr}$)

Les lignes de force sont donc définies, nécessairement par les lignes

$$A(\phi, r) = \text{constante}$$

ANNEXE 3

POTENTIEL VECTEUR DE COURANTS RECTILIGNES PARALLELES FILIFORMES

De l'expression générale de définition du potentiel vecteur

$$\vec{A} = \frac{\mu_o}{4\pi} \int \frac{\vec{i}\, dv}{x}$$

On tire la relation du potentiel vecteur cherché compte tenu de la nature filiforme des courants inducteurs.

$$A = \frac{\mu_o I}{4\pi} \int_{-z}^{+z} \left(\frac{dz}{l} - \frac{dz}{l'} \right)$$

$$A = \frac{\mu_o I}{2\pi} \int_{o}^{z} \left(\frac{dz}{r_1^2 + z^2} - \frac{dz}{r_2^2 + z^2} \right)$$

avec r_1 , r_2, les distances des fils inducteurs au point M où le potentiel vecteur A est calculé (M est situé sur le plan de figure n° 16) l'intégration faite, il vient :

$$A = \frac{\mu_o I}{2\pi} \left[\operatorname{Log} \left(z + \sqrt{r_1^2 + z^2} \right) \right]_0^Z - \left[\operatorname{Log} \left(z + \sqrt{r_2^2 + z^2} \right) \right]_0^Z$$

soit

$$A = \frac{\mu_o I}{2\pi} \quad Log \quad \frac{z + \sqrt{r_1^2 + z^2}}{z + \sqrt{r_2^2 + z^2}} \qquad \begin{matrix} Z \\ \\ 0 \end{matrix}$$

ou en faisant tendre Z $\rightarrow \infty$

$$A = \frac{\mu_o I}{2\pi} \quad Log \quad \left(\frac{r_2}{r_1} \right)$$

ou en core

$$A' = \frac{\mu_o I}{2\pi} \quad (Log \ r_2 - Log \ r_1)$$

mais

$$r_1^2 = r^2 + b^2 - 2\,br \cos(\phi - \theta)$$

$$r_2^2 = r^2 + b^2 - 2\,br \cos(\phi - \theta)$$

En se souvenant que

$$Cos\ \phi = \frac{exp(j\phi) + exp(-j\phi)}{2}$$

on peut écrire $Log\ (r^2 + b^2 - 2\,br \cos(\phi - \theta)$ sous les formes

$$Log \quad r^2 + b^2 - br \ (exp\ j(\phi - \theta) + exp - j(\phi - \theta)$$

$$Log \quad b^2 \left(\frac{r^2}{b^2} + 1 - \frac{r}{b} \right) (exp\ j(\phi - \theta) + exp - j(\phi - \theta)$$

$$2 \text{ Log } b + \text{Log} \quad 1 - \frac{r}{b} \exp j (\phi - \theta) - \frac{r}{b} \exp - j (\phi - \theta) + \frac{r^2}{b^2}$$

La partie entre crochets précédente est de la forme

$$(1 - \alpha) (1 - \beta) = 1 - \alpha - \beta + \alpha\beta$$

d'où

$$2 \text{ Log } b + \text{Log} (1 - \frac{r}{b} \exp j (\phi - \theta) + \text{Log} (1 - \frac{r}{b} \exp - j (\phi - \theta)$$

Développons $\text{Log} (1 - \frac{r}{b} \exp j (\phi - \theta)$ *en série en faisant la réserve* $r < b$ *afin d'avoir* $r^2/b^2) \exp j2 (\phi - \theta) < 1$ *avec pour intervalle de définition de* ϕ *l'ensemble* $\phi , \pi + \theta$

$$\text{Log} (1 - \frac{r}{b} \exp j (\phi - \theta) = - \frac{r}{b} \exp j (\phi - \theta) - \frac{1}{2} \frac{r^2}{b^2} \exp j2 (\phi - \theta) \ldots$$

$$- \frac{1}{n} \frac{r^n}{b^n} \exp jn (\phi - \theta)$$

Développons le même $\text{Log} (1 - \frac{r}{b} \exp - j (\phi - \theta)$ *en série et sommons les deux séries*

On obtient :

$$- \frac{r}{b} (\exp j (\phi - \theta) + \exp - j (\phi - \theta) - \frac{1}{2} \frac{r^2}{b^2} (\exp j2 (\phi - \theta) + \exp - j2 (\phi - \theta)$$

$$\ldots - \frac{1}{n} \frac{r^n}{b^n} (\exp jn (\phi - \theta) + \exp - jn (\phi - \theta)$$

ou

$$-\frac{2r}{b}\cdot\cos(\phi-\theta)-\frac{r^2}{b^2}\cos 2(\phi-\theta)\ \ldots\ -\frac{2r^n}{nb^n}\cos n(\phi-\theta)$$

Ce qui peut s'écrire

$$\sum_{n=1}\frac{2}{n}\frac{r^n}{b^n}\cos n(\phi-\theta)$$

D'où en définitive

$$\text{Log}(r^2+b^2-2br\cos(\phi-\theta)=2\,\text{Log}\,b-\sum_{n=1}\frac{2}{n}\frac{r^n}{b^n}\cos n(\phi-\theta)=\text{Log}\,r_1^2$$

et de même

$$\text{Log}(r^2=b^2-2br\cos(\phi+\theta)=2\,\text{Log}\,b-\sum_{n=1}\frac{2}{n}\frac{r^n}{b^n}\cos n(\phi+\theta)=\text{Log}\,r_2^2$$

L'expression finale de A devient alors :

$$A=\frac{\mu_o I}{2\pi}\left(\sum_{n=1}\frac{1}{n}\frac{r^n}{b^n}\right)\left(\cos n(\phi-\theta)-\cos n(\phi+\theta)\right)$$

$$A=\frac{\mu_o I}{\pi}\sum_{n=1}\frac{1}{n}\frac{r^n}{b^n}\sin n\,\phi\cdot\sin n\,\theta$$

sous la condition $r < b$

ANNEXE 4

INFLUENCE DE LA PRESENCE DU CYLINDRE CIRCULAIRE SUR LA DISTRIBUTION DU POTENTIEL VECTEUR (figure n° 15)

- Cas du comportement pseudodiamagnétique parfait
- Le potentiel vecteur pseudo-scalaire se décompose en deux parties :

. l'une A' dûe aux courants + et - I
. l'autre dûe aux courants d'enveloppe, circulant à la surface du cylindre

On connait l'expression de A' établie à l'annexe n° 3

A" doit satisfaire l'équation de LAPLACE : $\Delta A'' = 0$
Admettre les mêmes symétries que A' et enfin tendre vers zéro lorsque r croit indéfiniment.

Cela conduit à une solution du Laplacien cylindrique de la forme :

$$A'' = \frac{\mu_o I}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^{-n} \sin n \phi$$

Mais d'après l'hypothèse sur la nature du cylindre :

$$A = 0 \qquad si \; r \leq r_o$$

donc $A'' = - A' \quad pour \; r = r_o$

et $$a_n = \frac{1}{n} \frac{r^{2n}_o}{b^n} \sin n \theta$$

L'expression finale du potentiel vecteur sera donc :

$$A = A' + A'' = \frac{\mu_o I}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{r^n}{b^n} \sin n\theta \left(1 - \frac{r^{2n}_o}{r^{2n}} \right) \sin n \phi$$

On remarque immédiatement que le potentiel A" est le même que celui créé par deux courants rectilignes filiformes et parallèles , + et - I calés à l'angle θ , sur le rayon $b'' = r_o^2/b$

ANNEXE 9

Reprenons les équations de base

$$\overrightarrow{Rot}\ \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\overrightarrow{Rot}\ \vec{H} = \vec{j}$$

Durant un intervalle de temps δt *, le champ induit* $\vec{E}$ *effectue un travail*

$$\delta W = \delta t \int_v \vec{j} \cdot \vec{E}\ dv$$

sur les courants de densité j"

On peut dire que $-\delta W$ *représente le travail fourni du champ électrique, par les générateurs extérieurs.*

On peut écrire en remplaçant $\vec{j}$ *par son expression équivalente*

$$\delta W = -\delta t \int_v \vec{E} \cdot \overrightarrow{Rot}\ \vec{H}\ dv$$

ou d'après une relation vectorielle

$$\delta W = \delta t \int_v div\ (\vec{E} \wedge \vec{H})\ dv - \int_v \vec{H} \cdot \overrightarrow{Rot}\ \vec{E}\ dv$$

si $v \to \infty$ *l'intégrale du divergent* $\to 0$

En remplaçant $\vec{E}$ par $-\partial B/\partial t$

$$\delta W = \delta t \quad \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \, dv$$

d'après les relations thermodynamiques classiques

$$dF = -SdT + dt \quad \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot dv$$

$$dV = T \cdot dS + dt \quad \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \, dv$$

à S ou T = cte et $\mu = \mu_o$ = cte

$$F = U = \frac{1}{2} \quad \vec{H} \cdot \vec{B} \cdot dv$$

$$= \frac{1}{2} \quad \vec{H} \cdot \overrightarrow{Rot} \, \vec{A} \, dv$$

$$= -\frac{1}{2} \, div \, (\vec{H} \wedge \vec{A}) \, dv + \frac{1}{2} \quad \vec{A} \cdot \overrightarrow{Rot} \, \vec{H} \, dv$$

$$= \qquad 0 \qquad + \frac{1}{2} \quad \vec{A} \cdot \vec{j} \, dv$$

ANNEXE 5

DETERMINATION DE LA FONCTION $R_i(r)$

Substituons cette forme $A_i = R_i(r) \cdot G_i(\phi)$

dans l'équation de base, divisons les deux membres par A_i *et multiplions par* r^2, *il vient :*

$$\frac{r^2}{R_i}\frac{d^2R_i}{dr^2} + \frac{r}{R_i}\frac{dR_i}{dr} + \frac{1}{G_i}\frac{d^2G_i}{d\phi^2} = j\,\omega\mu_o g r^2$$

Pour satisfaire cette équation, il faut nécessairement

$$\frac{1}{G_i}\cdot\frac{d^2G_i}{d\phi^2} = -n^2 = \text{constante}$$

La constante est écrite sous la forme $-n^2$ *pour la commodité des calculs ultérieurs.*

En remplaçant dans l'équation précédente, et en multipliant par R_i, *il vient*

$$r^2\frac{d^2R_i}{dr^2} + r\frac{dR_i}{dr} + (-j\,\omega\,\mu_o\,g r^2 - n^2)\,R_i = 0$$

En posant $-j\,\omega\,\mu_o g = k^2$, *on se ramène à une équation différentielle de BESSEL*

$$r^2\frac{d^2R_i}{dr^2} + r\frac{dR_i}{dr} + (k^2r^2 - n^2)\,R_i = 0$$

La solution générale classique de l'équation de BESSEL est de la forme

$$R_i = C_n J_n (kr) + C_n''' Y_n (kr)$$

J_n (kr) et Y_n (kr) étant respectivement les fonctions de BESSEL de première et seconde espèce, d'ordre n.

C_n et C_n''' des constantes appropriées aux conditions physiques du dispositif.

Cependant, lorsque r = 0, Y_n (kr) → ∞ ce qui est physiquement impossible dans notre cas puisque cela conduirait à une induction magnétique infinie au centre du barreau.

Nous retiendrons donc seulement la solution: $C_n''' = 0$

$$R_i = C_n J_n (kr)$$

ou

$$R_i = C_n J_n (j^{3/2} \cdot r \sqrt{\mu_o \omega g}$$

DETERMINATION DE LA FONCTION G_i (Ø)

L'équation

$$\frac{1}{G_i} \frac{d^2 G_i}{d\emptyset^2} = - n^2$$

peut s'écrire

$$\frac{d^2 G_i}{d\emptyset^2} + n^2 G_i = 0$$

Equation différentielle classique dont la solution générale est de la forme

$$G_i = K_n \cos n\emptyset + K_n'' \text{ Sin } n\emptyset$$

avec K_n *et* K''_n *des constantes convenables*

La fonction G doit admettre les mêmes propriétés de symétrie que notre dispositif, notamment ELLE NE PEUT PAS CONTENIR DE FONCTION IMPAIRE *telle que Sinnθ , donc* $K''_n = 0$

Nous retenons comme solution

$$G_i = K_n \cos n\theta$$

ANNEXE 6

En utilisant la méthode de séparation des variables, nous chercherons des solutions de la forme

$$A_e = R_e(r) \cdot G_e(\emptyset) \cdot \exp j\omega t$$

En opérant comme lors de la résolution de l'équation de base (A_i) par substitution, division par A_e et multiplication par r^2, il vient :

$$\frac{1}{R_e}\left(r^2 \frac{d^2R_e}{dr^2} + r\frac{dR_e}{dr}\right) + \frac{1}{G_e}\frac{d^2G_e}{d\emptyset^2} = 0$$

On peut séparer en deux équations différentielles

$$\frac{d^2G_e}{d\emptyset^2} + n^2G_e = 0$$

et

$$r^2\frac{d^2R_e}{dr^2} + r\frac{dR_e}{dr} - n^2R_e = 0$$

La solution G_e, de même que pour l'équation de base précédente sera :

$$G_e = K'_n \cos n\emptyset$$

La solution R_e est de la forme générale

$$R_e = C'_n r^n + C''_n r^{-n}$$

ANNEXE N° 8

On peut écrire :

$$h_n J_n \left(j^{3/2} \frac{r_o}{\delta} \sqrt{2}\right) - h'_n r_o^{-n} = \frac{\mu_o I}{2\pi} \cdot \frac{1}{nb^n} \cdot r_o^n$$

$$h_n \frac{d}{dr} \left(J_n \left(j^{3/2} \frac{r_o}{\delta} \sqrt{2}\right)\right) + h'_n n r_o^{-(n+1)} = \frac{\mu_o I}{2\pi} \cdot \frac{1}{b^n} \cdot r_o^{n-1}$$

La résolution opérée, il vient :

$$h_n = \frac{\mu_o I}{\pi} \frac{1}{b^n} \frac{r_o^n}{n J_n \left(j^{3/2} \frac{r_o}{\delta} \sqrt{2}\right) + r_o \frac{d}{dr} J_n \left(j^{3/2} \frac{r_o}{\delta} \sqrt{2}\right)}$$

et

$$h'_n = \frac{\mu_o I}{2\pi} \frac{r_o^{2n}}{nb^n} \left(-1 + \frac{2n J_n \left(j^{3/2} \frac{r_o}{\delta} \sqrt{2}\right)}{n J_n \left(j^{3/2} \frac{r_o}{\delta} \sqrt{2}\right) + r_o \frac{d}{dr} J_n \left(j^{3/2} \frac{r_o}{\delta} \sqrt{2}\right)} \right)$$

Il nous reste à expliciter les fonctions de BESSEL J_n et $\frac{d}{dr} J_n$

Comme $J_n \left(j^{3/2} \frac{r_o}{\delta} \sqrt{2}\right) = Ber_n \left(\frac{r_o}{\delta} \sqrt{2}\right) + j\, Bei_n \left(\frac{r_o}{\delta} \sqrt{2}\right)$

et $\frac{d}{dr} \left(J_n \left(j^{3/2} \frac{r_o}{\delta} \sqrt{2}\right)\right) = \frac{\sqrt{2}}{\delta} \left(Ber'_n \left(\frac{r_o}{\delta} \sqrt{2}\right) + j\, Bei'_n \left(\frac{r_o}{\delta} \sqrt{2}\right)\right)$,

Ber'_n et Bei'_n désignent les dérivées premières des fonctions de Bessel Ber_n et Bei_n

$$h_n = \frac{\mu_o I}{\pi} \frac{1}{b^n} \cdot \frac{r_o^n}{n\, Ber_n \left(\frac{r_o}{\delta} \sqrt{2}\right) + \frac{r_o}{\delta} \sqrt{2}\, Ber'_n \left(\frac{r_o}{\delta} \sqrt{2}\right) + j \left(n\, Bei_n \left(\frac{r_o}{\delta} \sqrt{2}\right) + \frac{r_o}{\delta} \sqrt{2}\, Bei'_n \left(\frac{r_o}{\delta} \sqrt{2}\right)\right)}$$

Soit en multipliant par l'expression conjuguée du dénominateur :

$$h_n = \frac{\mu_o I}{\pi} \cdot \frac{r_o^n}{b^n} \cdot (N_n - jP_n)$$

avec

$$N_n = \frac{n\,Ber_n\left(\frac{r_o}{\delta}\sqrt{2}\right) + \frac{r_o}{\delta}\sqrt{2}\,Ber'_n\left(\frac{r_o}{\delta}\sqrt{2}\right)}{\left(n\,Ber_n\left(\frac{r_o}{\delta}\sqrt{2}\right) + \frac{r_o}{\delta}\sqrt{2}\,Ber'_n\left(\frac{r_o}{\delta}\sqrt{2}\right)\right)^2 + \left(n\,Bei_n\left(\frac{r_o}{\delta}\sqrt{2}\right) + \frac{r_o}{\delta}\sqrt{2}\,Bei'_n\left(\frac{r_o}{\delta}\sqrt{2}\right)\right)^2}$$

et

$$P_n = \frac{n\,Bei_n\left(\frac{r_o}{\delta}\sqrt{2}\right) + \frac{r_o}{\delta}\sqrt{2}\,Bei'_n\left(\frac{r_o}{\delta}\sqrt{2}\right)}{\left(n\,Ber_n\left(\frac{r_o}{\delta}\sqrt{2}\right) + \frac{r_o}{\delta}\sqrt{2}\,Ber'_n\left(\frac{r_o}{\delta}\sqrt{2}\right)\right)^2 + \left(n\,Bei_n\left(\frac{r_o}{\delta}\sqrt{2}\right) + \frac{r_o}{\delta}\sqrt{2}\,Bei'_n\left(\frac{r_o}{\delta}\sqrt{2}\right)\right)^2}$$

$$h'_n = \frac{\mu_o I}{2\pi} \cdot \frac{r_o^{2n}}{nb^n} \left(-1 + \frac{2n\,J_n}{n\,J_n + r_o \frac{d}{dr} J_n}\right)$$

$$\frac{J_n}{n J_n + r_o \frac{d}{dr} J_n} =$$

$$\frac{Ber_n \left(\frac{r_o}{\delta}\sqrt{2}\right) + j\, Bei_n \left(\frac{r_o}{\delta}\sqrt{2}\right)}{n\, Ber_n \left(\frac{r_o}{\delta}\sqrt{2}\right) + n\, j\, Bei_n \left(\frac{r_o}{\delta}\sqrt{2}\right) + \frac{r_o}{\delta}\sqrt{2}\, Ber'_n \left(\frac{r_o}{\delta}\sqrt{2}\right) + j \frac{r_o}{\delta}\sqrt{2} Bei'_n \left(\frac{r_o}{\delta}\sqrt{2}\right)} =$$

$$= Q_n + j\, S_n$$

Donc

$$h'_n = \frac{\mu_o I}{2\pi} \cdot \frac{r_o^{2n}}{n b^n} \cdot \left[-1 + 2n\,(Q_n + j\, S_n) \right]$$

avec

$$Q_n = N_n\, Ber_n \left(\frac{r_o}{\delta}\sqrt{2}\right) + P_n\, Bei_n \left(\frac{r_o}{\delta}\sqrt{2}\right)$$

$$S_n = N_n\, Bei_n \left(\frac{r_o}{\delta}\sqrt{2}\right) - P_n\, Ber_n \left(\frac{r_o}{\delta}\sqrt{2}\right)$$

ANNEXE 7

$$A_1 = \frac{\mu_o I_1}{\pi} \left\{ -\frac{1}{2} \operatorname{Log} b_2 + \Sigma \frac{r_o^n}{b_2^n} \left(N_n \operatorname{Ber}_n \left(\frac{\sqrt{2}r}{\delta} \right) + Pn \operatorname{Bei}_n \left(\frac{\sqrt{2}r}{\delta} \right) \right) \cos n (\phi + \theta + \beta_2) \right.$$

$$\left. + j \Sigma \frac{r_o^n}{b_2^n} \left(N_n \operatorname{Bei}_n \left(\frac{\sqrt{2}r}{\delta} \right) - Pn \operatorname{Ber}_n \left(\frac{\sqrt{2}r}{\delta} \right) \right) \cos n (\phi + \theta + \beta_2) \right\}$$

$$A_2 = -\frac{\mu_o I_1}{\pi} \left\{ -\frac{1}{2} \operatorname{Log} b_1 + \Sigma \frac{r_o^n}{b_1^n} \left[N_n \operatorname{Ber} \left(\frac{\sqrt{2}r}{\delta} \right) + Pn \operatorname{Bei}_n \left(\frac{\sqrt{2}r}{\delta} \right) \right] \cos n (\phi - \theta + \beta_1) \right.$$

$$\left. + j \Sigma \frac{r_o^n}{b_1^n} \left[N_n \operatorname{Bei}_n \left(\frac{\sqrt{2}r}{\delta} \right) - P_n \left(\frac{\sqrt{2}r}{\delta} \right) \right] \cos n (\phi + \beta_1 - \theta) \right\}$$

avec

$$b_2 = \sqrt{b^2 + R^2 - 2bR \cos (\theta + \psi)}$$

$$b_1 = \sqrt{b^2 + R^2 - 2bR \cos (\psi - \theta)}$$

$$\beta_1 = \operatorname{Arcsin} \frac{R . \sin (\psi - \theta)}{b_1}$$

$$\beta_2 = \operatorname{Arcsin} \frac{R . \operatorname{Sin} (\theta + \psi)}{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(A_1 + A_2) = \frac{\mu_o}{\pi} I_1 \omega_1 \Sigma (F'_n - jF_n)\left[\frac{\cos n(\phi - \theta + \beta_1)}{b_1^n} - \frac{\cos n(\phi + \theta + \beta_2)}{b_2^n}\right] + j\frac{1}{2}\mathrm{Log}\left(\frac{b_1}{b_2}\right)$$

en posant :

$$F_n = ro^n \left[N_n \, Ber_n\left(\frac{\sqrt{2}ro}{\delta}\right) + B_n \, Bei_n\left(\frac{\sqrt{2}ro}{\delta}\right)\right]$$

et

$$F'_n = r_o^n \left[N_n Bei_n\left(\frac{\sqrt{2}ro}{\delta}\right) - P_n \, Ber_n\left(\frac{\sqrt{2}ro}{\delta}\right)\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(A_1 + A_2) = \frac{\sqrt{2}\,\mu_o}{\delta\,\pi} I_1 \Sigma (R_n + jR'_n) \cdot \left[\frac{\cos n(\phi + \theta + \beta_2)}{b_2^n} - \frac{\cos n(\phi - \theta + \beta_1)}{b_1^n}\right]$$

en posant :

$$R_n = r_o^n \left[N_n \, Ber_n\left(\frac{\sqrt{2}r_o}{\delta}\right) + P_n \, Bei_n\left(\frac{\sqrt{2}r_o}{\delta}\right)\right]$$

et

$$R'_n = r_o^n \left[N_n \, Bei_n\left(\frac{\sqrt{2}r_o}{\delta}\right) - P_n \, Ber_n\left(\frac{\sqrt{2}r_o}{\delta}\right)\right]$$

$$W = \frac{r_o \mu_o I_1^2 \omega_1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \left\{ \sum F'_n \left[\frac{\cos n (\phi - \theta + \beta_1)}{b_1^n} - \frac{\cos n (\phi + \theta + \beta_2)}{b_2^n} \right] \right.$$

$$\left. + j \sum F_n \left[\frac{\cos n (\phi - \theta + \beta_1)}{b_1^n} - \frac{\cos n (\phi + \theta + \beta_2)}{b_2^n} \right] - j \frac{1}{2} \operatorname{Log} \left(\frac{b_1}{b_2} \right) \right\}'$$

$$\cdot \left\{ \sum R_n \left[\frac{\cos n (\phi + \theta + \beta_2)}{b_2^n} - \frac{\cos n (\phi - \theta + \beta_1)}{b_1^n} \right] + j \sum R'_n \right.$$

$$\left. \left[\frac{\cos n (\phi + \theta + \beta_2)}{b_2^n} - \frac{\cos n (\phi - \theta + \beta_1)}{b_1^n} \right] \right\}' \cdot d\phi$$

ANNEXE 10

INTERACTION MECANIQUE ENTRE DEUX SPIRES CIRCULAIRES

Soient deux circuits (C_1) et (C_2), circulaires, plans, parallèles filiformes et coaxiaux.

$(C_1$ est parcouru par un courant instantané arbitraire i_1.
(C_2) est le siege d'un courant instantané i_2 induit par le circuit (C_1).

CALCULER LA FORCE RESULTANTE MOYENNE AXIALE " F " EXERCEE SUR (C_2) PAR L'INFLUENCE DE (C_1).

Le problème se réduit à la détermination de la dérivée $\frac{d\Phi}{dz}$ du flux Φ coupé par le circuit (C_2) en fonction de z.
Le flux d'induction Φ envoyé par (C_1) à travers (C_2) peut s'écrire

$$\Phi = M\, i_1$$

M étant la mutuelle inductance entre C_1 et C_2
Il vient immédiatement :

$$\frac{d\Phi}{dz} = i_1 \frac{dM}{dz}$$

. . . . . .

on peut écrire, d'après l'annexe 2.

$$f = i_1 \, i_2 \, \frac{dM}{dz}$$

En ne retenant pour les applications pratiques que les courants en régime sinusoïdal permanent :

$$f = I_1 \, I_2 \cos \omega t \, . \, \cos (\omega t + \psi) . \frac{dM}{dz}$$

I_1 et I_2 représentent les amplitudes des courants correspondants
ψ est leur déphasage.

Comme

$$\cos \omega t \, . \, \cos (\omega t + \psi) = \frac{1}{2} \cos (2 \omega t + \psi) + \frac{1}{2} \cos \psi$$

il vient :

$$f = \frac{I_1 I_2}{2} \left[\cos (2\omega t + \psi) + \cos \psi \right] . \frac{dM}{dz} = f_1 + f_2$$

en posant :

$$f_1 = \frac{I_1 I_2}{2} \cos (2\omega t + \psi) \, . \, \frac{dM}{dz}$$

$$f_2 = \frac{I_1 I_2}{2} \cos\psi \cdot \frac{dM}{dz}$$

puisque

$$\frac{1}{T} \int_0^T \cos(2\omega t + \psi) \cdot dt = 0$$

La force moyenne F_m cherchée a pour valeur

$$\boxed{F_m = f_2 = \frac{I_1 I_2}{2} \cdot \cos\psi \cdot \frac{dM}{dz}}$$

Mais I_2 est une fonction de I_1 et des dimensions géométriques du système (C_1) (C_2).

La solution du problème proposé se circonscrit, en fin de compte, aux calculs

a) du courant $I_2 \cdot \cos\psi$
b) de la résistance électrique R de (C_2)
c) de la fonction de l'inductance mutuelle M entre (C_1) et (C_2)
d) de la fonction dérivée de M par rapport à z
e) du coefficient d'autoinductance L de (C_2)

a) CALCUL DE I_2 . COS φ

Appelons R la résistance électrique du circuit (C_2)

L son autoinductance

E la force électromotrice d'induction dans (C_2)

On peut écrire symboliquement :

$$\overline{E} = R\overline{I}_2 + j\ L\omega\overline{I}_2$$

$$\overline{E} = -\ j\ M\omega\overline{I}_1$$

$$\overline{I}_2 = -\ \frac{j\ M\omega\overline{I}_1}{R + j\ L\omega}$$

$$\overline{I}_2 = -\ \frac{M\omega I_1}{R^2 + L^2\omega^2}.\ (L\omega + jR)$$

Prenons I_1 comme origine des phases, il vient pour module de I_2

$$I_2 = \frac{M\omega I_1}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}$$

et pour la phase

$$\varphi = \text{arc tg}\ \frac{R}{L\omega} + \pi$$

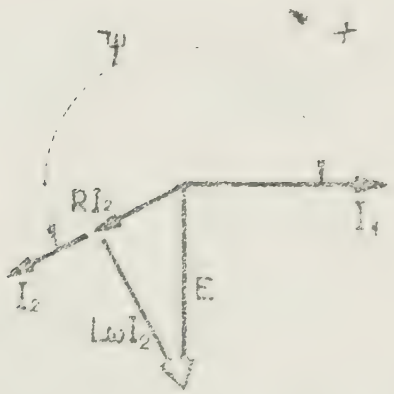
comme

$$1 + \operatorname{tg}^2\psi = \frac{1}{\cos^2\psi}$$

$$\cos\psi = \frac{-L\omega}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}$$

Il vient finalement

$$\cos\psi \cdot I_2 = \frac{M L\omega^2 I_1}{R^2 + L^2\omega^2}$$



b) CALCUL DE R

Au contraire du coefficient d'autoinductance la valeur de la résistance ohmique du circuit (C_2) sera fortement modifiée par l'effet pelliculaire.

Le problème est très classique et on le trouve traité dans de nombreux ouvrages de mathématiques consacrés aux fonctions de BESSEL.

Nous utiliserons ici une formule de résistance en haute fréquence due à LEVASSEUR, valable quelle que soit la fréquence avec une précision de 1 %. (Disons jusqu'à et au-delà 10^6 Hz).

$$R = \frac{2\rho r_2}{a^2}\left\{\left[0,178 + \left(10^{-3}\, a\sqrt{\frac{N}{\rho}}\right)^6\right]^{\frac{1}{6}} + 0,250\right\}$$

Avec N fréquence du courant, en Hz

ρ résistivité actuelle du matériau conducteur en Ω. m

" r_2 " et " a " en mètres. (" a " étant le rayon du fil constituant la boucle induite).

...

c) CALCUL DE M

Partant de la définition :

$$M = \frac{\Phi}{I_1}$$

il est nécessaire de connaître le flux Φ envoyé par (C_1) à travers (C_2)

$$\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot \vec{ds}$$

S étant une surface arbitraire simplement astreinte à s'appuyer sur (C_2).

C'est un fait d'expérience bien connu que l'induction magnétique a un flux conservatif.

La traduction mathématique de cette propriété est

$$\text{div } B = 0$$

ce qui caractérise un champ LAPLACIEN.

On démontre en analyse vectorielle qu'un tel champ permet de définir un vecteur $\vec{A}$ tel que :

$\operatorname{div} \vec{A} = 0$

$\operatorname{rot} \vec{A} = \vec{B}$

$\vec{A}$ est le potentiel vecteur de $\vec{B}$

On peut donc écrire maintenant :

$$\Phi = \iint_S \operatorname{rot} \vec{A} . d\vec{s}$$

D'après le théorème de STOKES

$$\Phi = \oint_{C_2} \vec{A} . d\vec{c}_2$$

Dans le cas des circuits filiformes qui nous intéressent, le potentiel vecteur $\vec{A}$, créé par (C_1) en un point de (C_2) tel que P s'écrira : (voir figure a)

$$A = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint_{C_1} \frac{d\vec{C}_1}{x}$$

En reportant cette valeur dans la dernière expression de Φ , il vient :

$$\Phi = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\vec{C}_1 . d\vec{C}_2}{x}$$

Exprimons cette intégrale en coordonnées cylindriques

$$dC_1 = r_1 \cdot d\alpha$$

$$dC_2 = r_2 \cdot d\alpha$$

$$x = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + z^2 - 2r_1 r_2 \cos\alpha}$$

En supposant le point courant P de (C_2) fixé à l'origine des arcs, ce qui n'altère d'aucune façon la généralité du calcul, puisque l'intégrale $\int_{(C_2)}$ est indépendante de la position du point P choisi comme origine des x

On obtient la nouvelle expression de M, d'après la définition $M = \Phi_{2,1}$

$$M = \frac{r_1 r_2 \mu_0}{4\pi} \oint_{(C_2)} d\alpha \oint_{(C_1)} \frac{\cos\alpha \cdot d\alpha}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 + z^2 - 2r_1 r_2 \cos\alpha}}$$

ou encore :

$$M = \frac{\mu_0 r_1 r_2}{2} \int_0^{2\pi} \frac{\cos\alpha \cdot d\alpha}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 + z^2 - 2r_1 r_2 \cos\alpha}}$$

Cette dernière intégrale peut se réduire à une somme d'intégrales elliptiques complètes de LEGENDRE

. . . . .

En posant :

$$k = \frac{2\sqrt{r_1 r_2}}{\sqrt{(r_1 + r_2)^2 + z^2}} \quad \text{et} \quad u = \frac{\alpha - \pi}{2}$$

il vient :

$$M = \mu_0 \sqrt{r_1 r_2} \left\{ \frac{2}{k} \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 . \sin^2 u} \, . \, du + \left(k - \frac{2}{k}\right) \int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}} \right\}$$

posons

$$\sqrt{1 - k^2 . \sin^2 u} \, . \, du = E(k)$$

$$\frac{du}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}} = F(k)$$

On peut trouver les valeurs E (k) et F (k) dans les tables de fonctions.

L'expression finale du coefficient de mutuelle inductance M sera

$$M = \pm \mu_0 \sqrt{r_1 r_2} \left[\left(k - \frac{2}{k}\right) . F(k) + \frac{2}{k} E(k) \right]$$

.../...

d) CALCUL DE $\frac{dM}{dz}$

$$\frac{dM}{dz} = \pm \mu_o \sqrt{r_1 r_2} \left\{ \frac{d(k - \frac{2}{k})}{dk} \cdot F(k) + \frac{dF(k)}{dk}(k - \frac{2}{k}) + \frac{d(\frac{2}{k})}{dk} E(k) + \frac{dE(k)}{dk} \cdot \frac{2}{k} \right\} \frac{dk}{dz}$$

en se souvenant que :

$$\frac{dF(k)}{dk} = \frac{1}{k(1-k^2)} \left\{ E(k) - (1-k^2)F(k) \right\}$$

$$\frac{dE(k)}{dk} = \frac{1}{k} \left\{ E(k) - F(k) \right\}$$

k = fonction de z

Il vient :

$$\frac{dM}{dz} = \pm \frac{2 \mu_o r_1 r_2 z}{(r_1 + r_2)^2 + z^2)^{3/2}} \left\{ (\frac{2}{k^2}) \cdot F(k) + \frac{k^2 - 2}{k^2(1 - k^2)} \cdot E(k) \right\}$$

Ce qui peut se mettre aisément sous la forme :

$$\boxed{\frac{dM}{dz} = \frac{\pm \mu_o}{4\sqrt{r_1 r_2}} \cdot \frac{z.k}{1-k^2} \left\{ (2-k^2)E(k) - 2 (1-k^2)F(k) \right\}}$$

.../...

e) CALCUL DE L

Les calculs suivants sont faits dans l'hypothèse où $a \ll r_2$ disons $a/r_2 \leq 20$.

On peut distinguer deux composantes dans le coefficient d'autoinductance L. cherché.

$$L = L_i + L_e$$

L_e représente un terme dû au flux coupé par la surface σ (figure 1bis) de la spire à l'intérieur du rayon $(r_2 - a)$ c'est à dire à l'extérieur du fil constituant la spire.

L_e peut etre assimilé au coefficient de mutuelle inductance entre deux circuits filiformes imaginaires de rayon r_2 et $(r_2 - a)$ concentriques.

L_e se déduit donc aisément de l'expression M donnée précédemment.

$$L_e = \mu_o r_2 \left[2E(k) - F(k) \right]$$

k prenant ici la valeur particulière

$$k = \frac{2\sqrt{r_2(r_2 - a)}}{2r_2 - a}$$

L_i représente la contribution du flux intérieur au fil de rayon "a", c'est à dire le flux coupé par la surface "s" de la figure 1 bis.

En toute rigueur le coefficient L_i varie en fonction de la fréquence.

.../...

On peut, étant donné l'hypothèse $a \ll r_2$ assimiler le fil curviligne à un fil rectiligne indéfini en ce qui concerne le calcul du flux intérieur.

Deux cas extrêmes se présentent

1°) TRES HAUTE FREQUENCE ; le courant est localisé à la surface du fil (effet KELVIN)

2°) FREQUENCE NULLE ; la densité de courant est constante en tout point de la section droite du fil.

Dans le cas de la très haute fréquence, le flux intérieur est évidemment nul donc $L_i = 0$

Pour une intensité I_2 donnée, le coefficient L_i aura sa valeur maximum en courant continu.

Afin de calculer L_i dans ce dernier cas, il nous a paru plus clair d'utiliser la notion d'énergie magnétique plutôt que celle de flux d'induction.

On sait que l'énergie magnétique emmagasinée dans le fil (comme dans n'importe quel espace de perméabilité μ_0) s'exprime par l'intégrale.

$$W_i = \frac{1}{2\mu_0} \int_V B^2 dv$$

Le théorème d'AMPERE permet d'écrire

$$B = \frac{\mu_0 . r . i}{2}$$

Avec i la densité constante du courant dans le fil.

Une transformation simple conduit à .

$$w_i = \frac{\mu_0 \pi l i^2}{4} \int_0^a r^3 \, dr$$

Avec l la longueur de fil dont on veut calculer le coefficient L_i

$$w_i = \frac{\mu_0 . l . i^2 \pi^2 a^4}{16\pi} = \frac{\mu_0 l I_2^2}{16\pi}$$

D'autre part, on sait que

$$w = \frac{1}{2} \; L \; I^2$$

donc

$$w_i = \frac{1}{2} \; L_i I_2^2 = \frac{\mu_0 l I_2^2}{16\pi}$$

.....

il vient :

$$L_i = \frac{\mu_o l}{8\pi}$$

dans notre cas, il est tout naturel de faire

$$l = 2\pi r_2$$

En définitive

$$L_i = \frac{\mu_o r_2}{4}$$

Avec un fil de spire de 1 mm de diamètre et un rayon moyen r_2 de 20 mm, l'erreur faite sur L en négligeant L_i est $\leq 6\ \%$.

RECAPITULATION

La force moyenne F_m peut s'écrire

$$F_m = \frac{1}{2} \cdot \frac{ML\omega^2 I_1^2}{R^2 + L^2\omega^2} \cdot \frac{dM}{dz}$$

avec : l'expression de L
" " R
" " M
" " dM/dz

pages précédentes

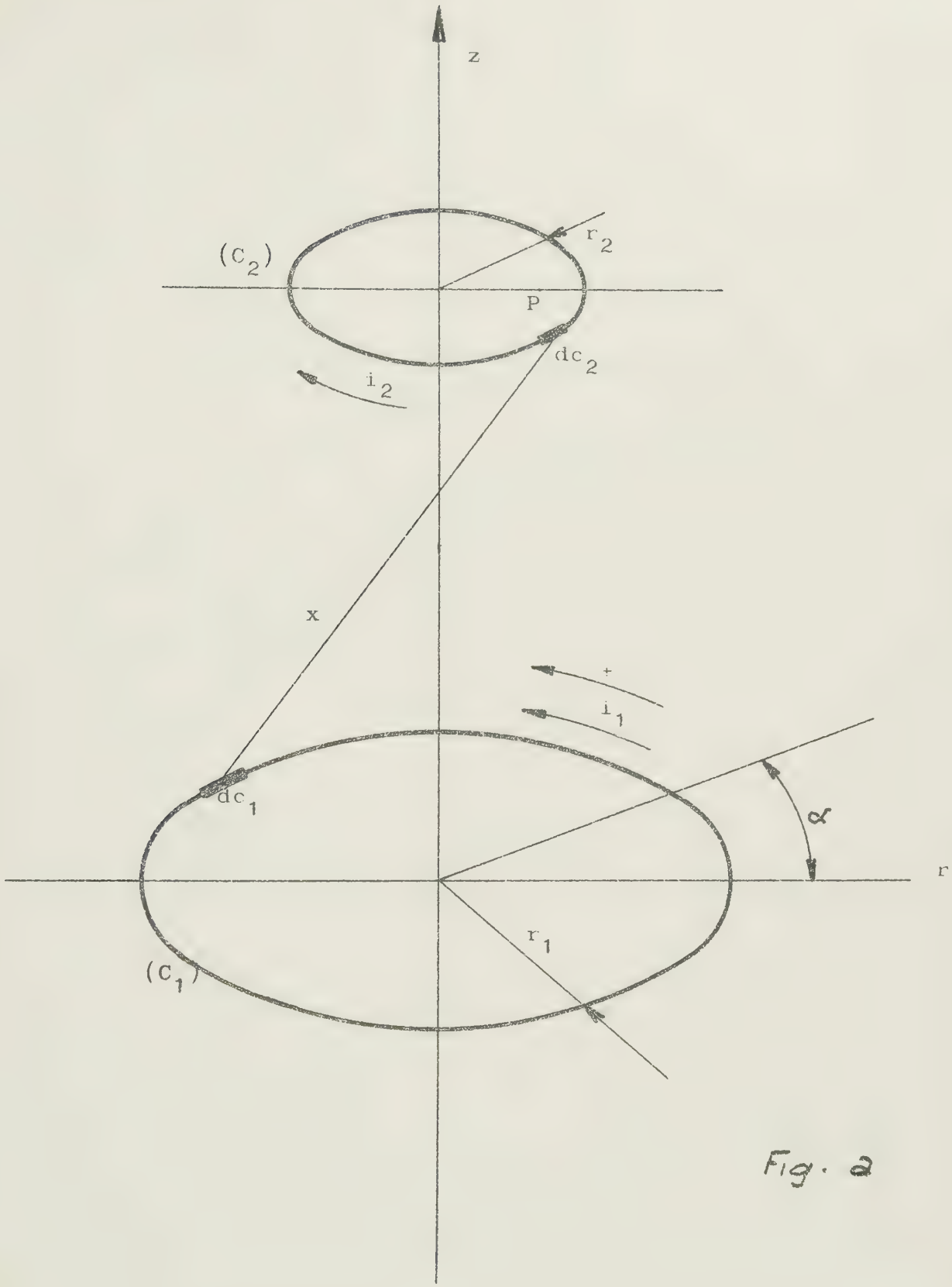


Fig. a

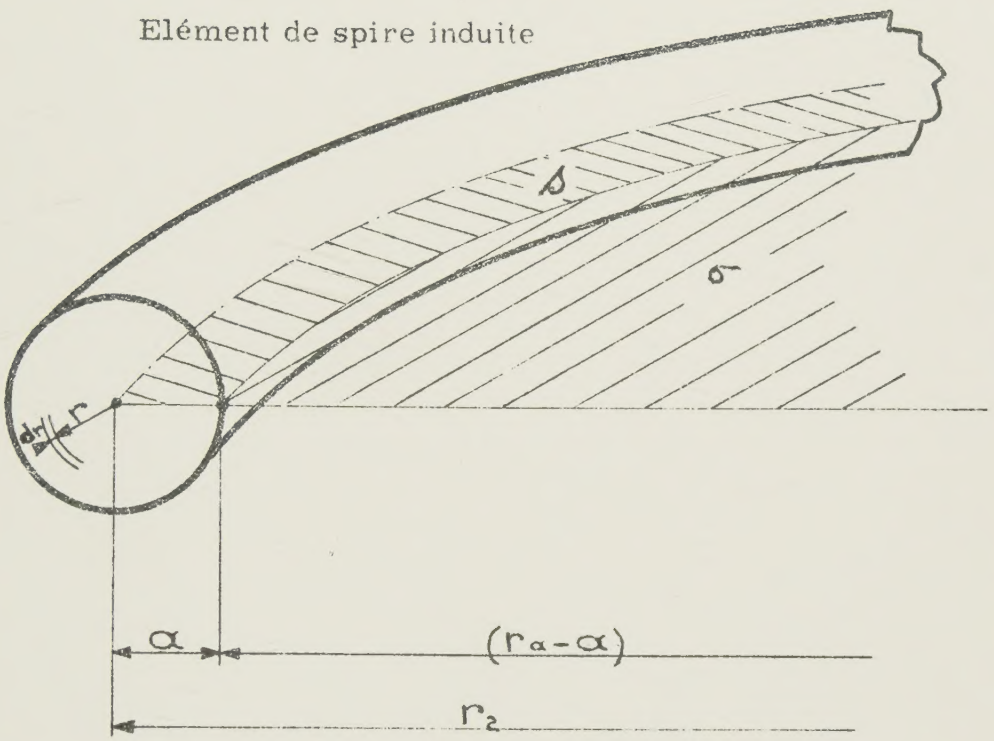
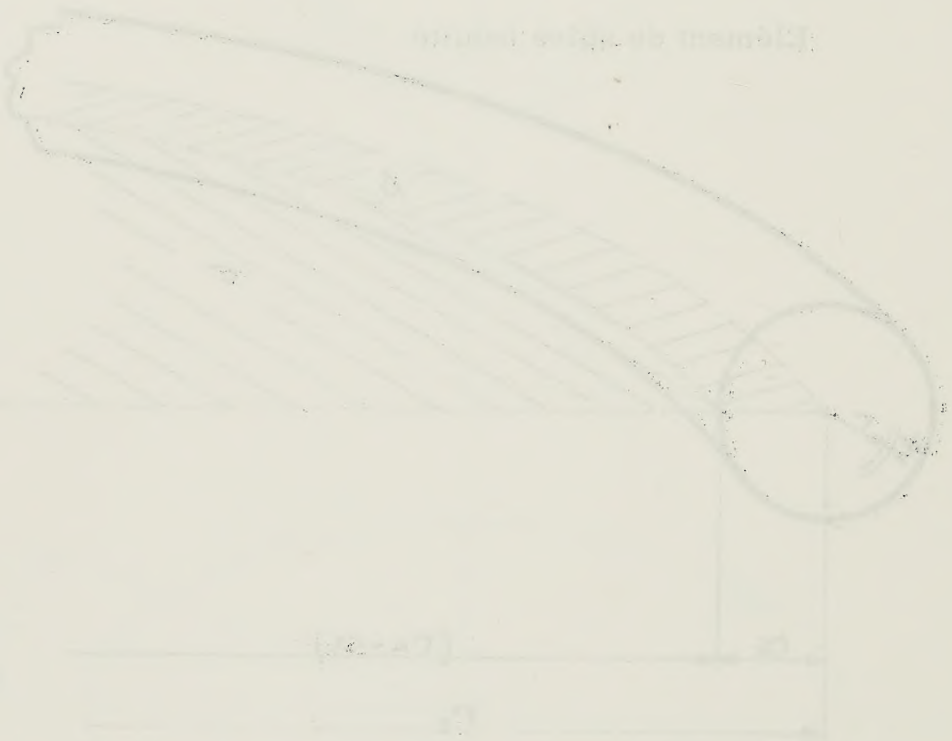



Fig. b